

# Capitolo 3

## Sistemi rigidi

### 3.1 Definizione e gradi di libertà

Si definisce **sistema rigido** un sistema materiale  $\mathfrak{R}$ , dotato di una massa  $m$ , i cui punti mantengono invariata la reciproca distanza durante il moto. Per semplicità di notazione, considereremo un sistema discreto formato da  $n$  punti materiali  $P_i$  dotati ciascuno di una massa  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , per cui  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ . L'estensione dei risultati che otterremo ai sistemi con distribuzione "continua" di massa è pressoché immediata e sarà considerata in seguito. Si intende per sistemi materiali continui quei sistemi dove è definita una funzione della posizione  $\rho(P)$ , detta densità di massa, che sia almeno integrabile secondo Riemann,<sup>1</sup> e tale che  $\int_C \rho(P) d^3P = m$ , dove  $m$  è la massa totale e  $C$  la regione di  $\mathbb{R}^3$  dove è distribuita la massa.

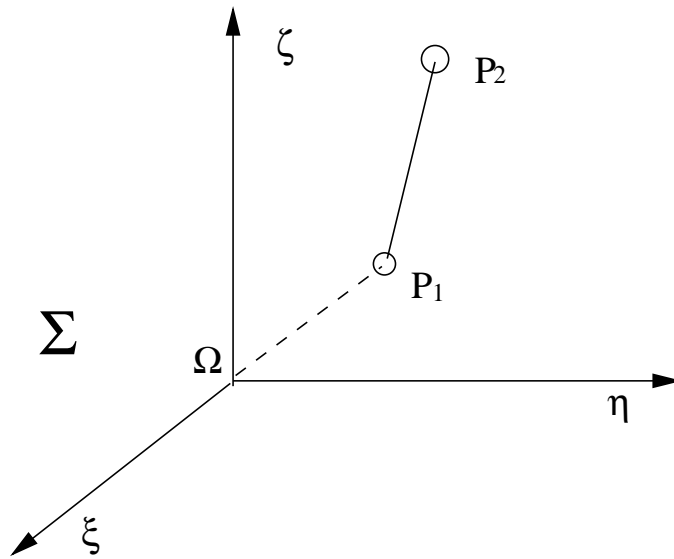
La condizione di rigidità per un sistema discreto può essere espressa imponendo

$$|P_i - P_j| = r_{ij} = \text{costante}, \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Indichiamo con  $\mathfrak{R}_{1,2}$  un sistema rigido costituito da due soli punti,  $P_1$  e  $P_2$ . È immediato verificare che è dotato di cinque gradi di libertà. Infatti, rispetto ad un osservatore  $\Sigma$  che ne osserva il moto in  $\mathbb{R}^3$ , occorreranno tre coordinate per individuare il punto  $P_1$  ed altre due per individuare la posizione di  $P_2$  sulla superficie sferica di centro  $P_1$  e raggio  $r_{12}$ .

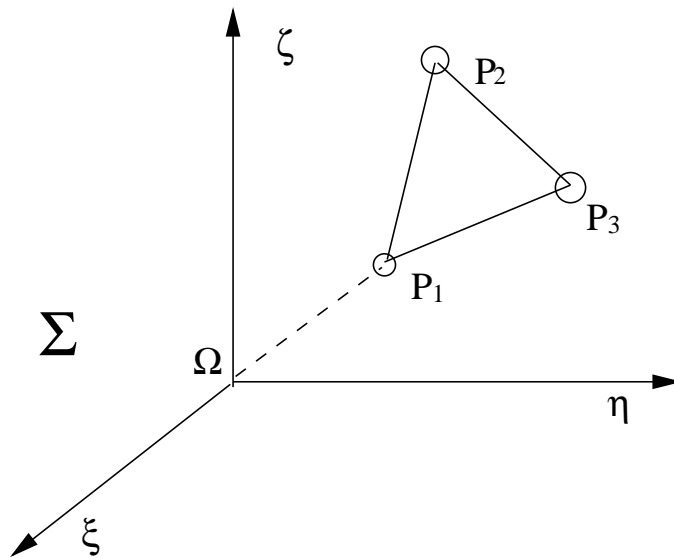
---

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann, matematico e fisico tedesco (Breselenz, 17 settembre 1826 - Selasca, 20 luglio 1866).



**Figura 3.1** Sistema rigido composto da due punti

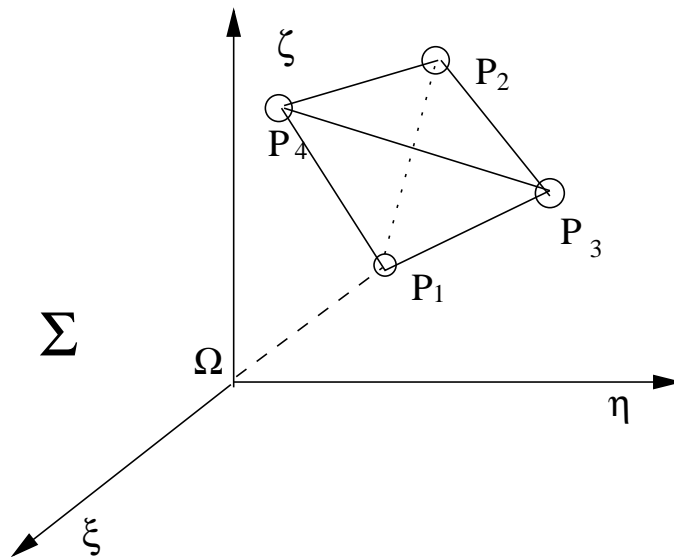
Un modo alternativo per calcolare il numero di gradi di libertà del sistema è quello di considerare che due punti liberi in  $\mathbb{R}^3$  hanno sei gradi di libertà, ma che fra di essi sussiste una relazione vincolare, espressa dalla (3.1), che li riduce a cinque.



**Figura 3.2** Sistema rigido composto da tre punti

Possiamo fare un conto analogo se consideriamo un sistema rigido composto da tre punti non allineati. Il sistema, se fosse libero, avrebbe sei gradi

di libertà, ma per mantenere rigida la maglia triangolare, occorrono tre relazioni vincolari indipendenti del tipo (3.1), che riducono a sei i gradi di libertà del sistema. Alternativamente, possiamo considerare che l'aggiunta del punto  $P_3$  al sistema  $\mathfrak{R}_{1,2}$  comporta un aumento di un grado di libertà del sistema stesso, poiché, a causa dei vincoli di rigidità, il punto  $P_3$  può solo ruotare attorno all'asse  $P_1P_2$  e, quindi, basterà un angolo per individuarne la posizione rispetto agli altri due punti. La maglia triangolare  $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ , costituita da tre punti fra loro rigidamente vincolati, rappresenta (per quanto riguarda il numero di gradi di libertà del sistema) il sistema rigido più generale perché l'aggiunta di punti rigidamente connessi a  $\mathfrak{R}_{1,2,3}$  non ne aumenta il numero di gradi di libertà. Infatti, se aggiungiamo un punto  $P_4$  a  $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ , aumentiamo di tre il numero di gradi di libertà ( $P_4$  punto libero), ma per connetterlo rigidamente agli altri punti occorrono tre relazioni vincolari del tipo (3.1) per costituire un tetraedro rigido  $\mathfrak{R}_{1,2,3,4}$ , che ha, pertanto, sei gradi di libertà come  $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ .



**Figura 3.3** Sistema rigido composto da tre punti

L'aggiunta di ogni ulteriore punto al sistema richiede ogni volta che esso venga "irrigidito" con tre relazioni del tipo (3.1) rispetto a tre punti non allineati del sistema (rispetto cioè ad una maglia triangolare) e pertanto non aggiunge gradi di libertà al sistema. In conclusione il sistema rigido discreto, composto da un numero finito qualunque di punti materiali,  $\{P_i, m_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , che indicheremo con  $\mathfrak{R}_n$ , ha sei gradi di libertà. Si tratta adesso di trovare dei sistemi di coordinate adatte ad esprimerli.

### L'osservatore solidale

È semplice stabilire che il moto di un corpo rigido  $\mathfrak{R}_n$  rispetto ad un osservatore  $\Sigma$  è rappresentabile dal moto di un osservatore  $S$  **solidale** rispetto ad  $\mathfrak{R}_n$ . Ricordiamo che un osservatore è rappresentato da una terna euclidea di mano destra e da un cronometro per misurare il tempo (tempo che, in ambito classico, è lo stesso per tutti gli osservatori). Con il termine solidale si intende caratterizzare quegli osservatori (ovviamente infiniti) che vedono fermi tutti i punti di  $\mathfrak{R}_n$ , indipendentemente dal moto che  $\mathfrak{R}_n$  effettua rispetto ad altri osservatori. L'osservatore solidale  $S$  conosce la posizione di tutti i punti di  $\mathfrak{R}_n$ , che sono individuati da coordinate scelte da  $S$  e che, per  $S$ , restano costanti nel tempo. Per studiare il moto di  $\mathfrak{R}_n$  rispetto a  $\Sigma$  basterà quindi studiare il moto di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  per trasferire tutta la “conoscenza” che  $S$  ha di  $\mathfrak{R}_n$  all'osservatore  $\Sigma$ .

Vedremo nel capitolo dedicato alla “Geometria delle Masse” quali saranno i modi ed i criteri migliori per scegliere un osservatore solidale da associare ad uno specifico corpo rigido. Possiamo qui presentare un primo esempio.

Scegliamo l'origine  $O$  di  $S$  coincidente con il punto  $P_1$  di  $\mathfrak{R}_n$  e prendiamo come primo asse del riferimento la retta orientata che va da  $P_1$  a  $P_2$ ; poniamo cioè  $\mathbf{i} = \frac{(P_2 - P_1)}{|P_2 - P_1|} := \text{vers}(P_2 - P_1)$ . Scegliamo come secondo asse quello individuato dal versore  $\mathbf{j} = \mathbf{i} \wedge \frac{(P_3 - P_1)}{|P_3 - P_1|}$ , sicuramente ortogonale al primo asse. Il terzo asse del riferimento, individuato dal versore  $\mathbf{k}$ , si ottiene dal prodotto vettoriale  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ .

## 3.2 Cinematica dei Rigidi

I risultati ottenuti nel paragrafo di Cinematica relativa sono di grande aiuto per stabilire formule per velocità ed accelerazione nel caso di moti di sistemi rigidi. Consideriamo infatti le formule (2.47) e (2.51). Nel caso che  $P$  sia un punto di un sistema rigido e che  $S$  sia un osservatore solidale al rigido stesso (che quindi vede  $P$  fermo) le formule fondamentali della cinematica dei rigidi (in forma intrinseca, cioè indipendente dalla scelta dell'osservatore in cui rappresentarle) si ottengono immediatamente:

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (P - O), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O), \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{v}(\cdot)$  e  $\mathbf{a}(\cdot)$  sono, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione del punto indicato in parentesi, osservate dal riferimento fisso  $\Sigma$ .

### Invariante scalare e asse istantaneo di moto

Consideriamo la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, espressa dalla (3.2) e moltiplichiamo ambo i membri scalarmente per  $\vec{\omega}$ .

Poiché  $\vec{\omega} \wedge (P - O)$  è un vettore perpendicolare ad  $\vec{\omega}$ , si ottiene

$$\mathbf{v}(P) \cdot \vec{\omega} = \mathbf{v}(O) \cdot \vec{\omega}, \quad (3.4)$$

ovvero, per l'osservatore fisso  $\Sigma$ , tutti i punti che partecipano al moto rigido hanno ad ogni istante la stessa componente della velocità parallela ad  $\vec{\omega}$ . La (3.4) è definita come **invariante scalare della velocità** nei moti rigidi. Indichiamo con  $\mathbf{v}_{\parallel}$  tale componente. La velocità (3.2) può dunque essere riscritta nella forma

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}_{\parallel}(P) + \mathbf{v}_{\perp}(P) = \mathbf{v}_{\parallel}(O) + \mathbf{v}_{\perp}(O) + \vec{\omega} \wedge (P - O), \quad (3.5)$$

Possiamo quindi scrivere l'invariante scalare nella forma

$$\mathbf{v}_{\parallel}(P) = \frac{\mathbf{v}(O) \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega}. \quad (3.6)$$

Vediamo adesso se esistono dei punti  $P$ , che partecipano al moto rigido, per i quali si annulli la componente della velocità  $\mathbf{v}_{\perp}(P)$ , ortogonale ad  $\vec{\omega}$ . Questo implica la soluzione dell'equazione vettoriale

$$\mathbf{v}_{\perp}(P) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_{\perp}(O) + \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0, \quad (3.7)$$

cioè

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) = (P - O) \wedge \vec{\omega}. \quad (3.8)$$

La (3.8), se risolvibile, ammette infinite soluzioni, perché nel prodotto vettoriale la componente di  $(P - O)$  parallela ad  $\vec{\omega}$  non dà contributo. Per risolvere la (3.8), individuamo un punto  $A$  sul piano  $\pi$  passante per  $O$  ed ortogonale ad  $\vec{\omega}$ , in modo che  $(A - O)$ ,  $\vec{\omega}$  e  $\mathbf{v}_{\perp}(O)$  costituiscano una terna ortogonale di mano destra. Se questo punto risolve l'equazione

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) = (A - O) \wedge \vec{\omega}, \quad (3.9)$$

allora tutti i punti della retta di equazione (in forma vettoriale)

$$(P - O) = (A - O) + \lambda \vec{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

risolvono la (3.8). Per risolvere la (3.9) moltiplichiamone a destra per  $\vec{\omega}$  ambo i membri:

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) \wedge \vec{\omega} = [(A - O) \wedge \vec{\omega}] \wedge \vec{\omega} = -\omega^2 (A - O), \quad (3.11)$$

dove l'ultimo passaggio è il risultato dello svolgimento del doppio prodotto vettoriale<sup>2</sup>. Il punto  $A$  cercato sul piano  $\pi$  è dunque dato da

$$(A - O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_{\perp}(O)}{\omega^2} = \frac{\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2}. \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>Ricordiamo la formula del doppio prodotto vettoriale:  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ .

Esiste quindi tutta una retta di equazione

$$(P - O) = (A - O) + \lambda \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

i cui punti hanno (se l'invariante scalare non è nullo) velocità parallela ad  $\vec{\omega}$ . La retta rappresentata da (3.13) è detta **asse istantanea di moto**, o **asse di istantanea rotazione** o anche **asse di Mozzi**<sup>3</sup> le cui equazioni in componenti sono

$$\frac{x - x_A}{\omega_x} = \frac{y - y_A}{\omega_y} = \frac{z - z_A}{\omega_z}$$

dove  $x, y, z$  sono le coordinate del punto  $P$  e  $x_A, y_A, z_A$  sono date dalla (3.12):

$$x_A = \frac{\omega_y v_z - \omega_z v_y}{\omega^2}, y_A = \frac{\omega_z v_x - \omega_x v_z}{\omega^2}, z_A = \frac{\omega_x v_y - \omega_y v_x}{\omega^2}.$$

Poiché, in generale, al variare del tempo,  $\vec{\omega}$  varia in direzione, oltre che in modulo, l'asse istantaneo di moto descrive una superficie rispetto all'osservatore fisso (rigata fissa) ed una diversa superficie rispetto all'osservatore mobile (rigata mobile). Le due superfici sono tangenti fra loro ad ogni istante  $t$  lungo la retta che costituisce, a quell'istante, l'asse istantaneo di moto. Le due superfici descritte dalle successive posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto rispetto ai due osservatori (fisso e solidale) si muovono dunque rotolando e strisciando l'una sull'altra. Questa caratterizzazione del moto rigido mostra che, nel caso generale, l'atto di moto "istantaneo" risulta scomponibile in un moto traslatorio parallelo alla direzione di  $\vec{\omega}$  in quell'istante (con velocità uguale all'invariante scalare (3.6)) ed un moto di rotazione attorno all'asse istantaneo di moto. L'atto di moto rigido "istantaneo" è dunque un atto di moto elicoidale, del tipo di quello di una vite che avanza ruotando attorno al proprio asse.

Nel caso in cui la direzione di  $\vec{\omega}$  sia costante, le due rigate sono superfici cilindriche (generate cioè da una retta che resta sempre parallela a se stessa). Nel caso in cui l'invariante scalare (3.6) sia nullo, le due rigate rotolano l'una sull'altra senza strisciare. In questo caso la rappresentatività del moto rigido può essere ristretta alle curve sezione fra la rigata fissa ed un piano ortogonale ad  $\vec{\omega}$  (**base**) e fra la rigata mobile e lo stesso piano (**rulletta**).

---

<sup>3</sup>Giulio Giuseppe Mozzi del Garbo, matematico, politico e poeta italiano (Firenze, 23 febbraio 1730 - Firenze, 16 aprile 1813).

La teoria che si sviluppa a partire dai sopra citati aspetti geometrici del moto rigido è alla base della costruzione degli ingranaggi, ovvero di quei meccanismi che trasformano un tipo di moto rigido in un altro tipo di moto rigido.

Elenchiamo adesso alcuni moti rigidi particolari, dandone la terminologia d'uso ed il numero di gradi di libertà, partendo dalla formula fondamentale (3.2):

se  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , il moto rigido è un **moto traslatorio**, che presenta tre gradi di libertà;

se  $\mathbf{v}(O) = \vec{0}$ , esiste un punto fisso del sistema rigido ed il moto è un **moto di precessione**, cui corrispondono tre gradi di libertà;

se  $\mathbf{v}(O) = \vec{0}$  e  $\vec{\omega}$  ha direzione costante, esiste un asse fisso del sistema rigido ed il moto è un **moto di rotazione**, cui corrisponde un grado di libertà;

se  $\mathbf{v}_{\parallel}(O) \neq \vec{0}$  e  $\vec{\omega}$  ha direzione costante, il moto è un **moto elicoidale**, cui corrispondono quattro gradi di libertà.

se  $\mathbf{v}_{\parallel}(O) = \vec{0}$  e  $\vec{\omega}$  ha direzione costante, il moto è un **moto rigido piano**, cui corrispondono tre gradi di libertà.

### 3.3 Teorema di Eulero

Un risultato particolarmente importante in Cinematica dei sistemi rigidi è costituito dal Teorema di Eulero <sup>4</sup>. Ricordiamo che la configurazione di un sistema rigido rispetto ad un osservatore fisso  $\Sigma S$  è nota se è conosciuta la posizione di un suo punto qualsiasi, diciamo  $O$ , e la matrice di rotazione  $\mathbb{A}$ , caratterizzante la configurazione di una terna  $S$ , avente origine in  $O$ , solidale al sistema rigido stesso. Trascurando la traslazione fra le origini dei due osservatori e considerando quindi  $O \equiv \Omega$ , origine di  $\Sigma$ , e quindi come un punto fisso, possiamo seguire il moto del sistema rigido attorno al suo punto  $O$  seguendo l'evoluzione nel tempo della matrice  $\mathbb{A}$ . Se facciamo inizialmente coincidere la terna  $S$  con la terna fissa  $\Sigma$ , avremo che all'istante iniziale  $\mathbb{A}(t_0) = \mathbb{I}$ , quindi  $\mathbb{A}(t_0)$  ha tre autovalori coincidenti ed uguali ad uno. Al passare del tempo  $\mathbb{A}(t)$ , per l'ipotesi di continuità del moto e per la sua proprietà di essere una matrice ortogonale di determinante uguale ad uno, ammetterà  $\forall t \in \mathbb{R}$  considerato, sempre almeno un autovalore reale ed uguale ad uno. Questo significa che, fissati  $t_0$  ed un qualunque  $t_1 > t_0$ , esiste sempre

---

<sup>4</sup>Leonhard Euler, matematico e fisico svizzero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783).

un punto  $P$ , solidale al rigido, tale che, posto  $(P - O) = \mathbf{r}_P$ , allora

$$\mathbb{A}(t_1)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P.$$

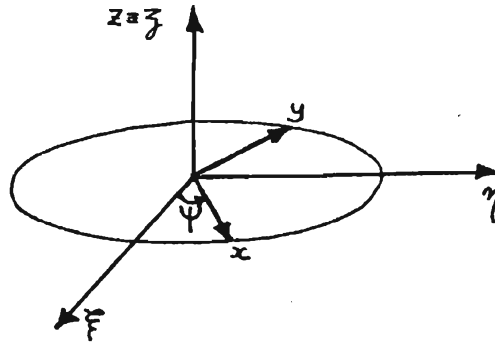
Questo significa che possiamo sempre riportare un sistema rigido (con un punto fisso) da una configurazione iniziale ad una finale mediante una rotazione attorno ad un asse fisso, che non è in generale l'asse di moto.

Riassumiamo questo risultato nell'enunciato del seguente

**Teorema di Eulero 3.3.1** *Sia dato un corpo rigido  $\mathfrak{R}$  con un punto fisso  $O$ . In ogni suo moto possibile, la configurazione raggiunta ad un qualunque tempo  $\tau > t_0$  può essere realizzata con una rotazione attorno ad un asse fisso passante per  $O$ . Tale asse dipende dal tempo  $\tau$  scelto e, in generale, varia al variare di esso.*

### 3.4 Angoli di Eulero

Consideriamo due terne di mano destra,  $(\Omega, \Sigma)$ , fissa, e  $(O, S)$ , solidale al sistema rigido considerato, rispettivamente di versori  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  e  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , con origine comune  $\Omega \equiv O$ . È possibile passare dall'una all'altra mediante l'applicazione di tre successive matrici di rotazione.



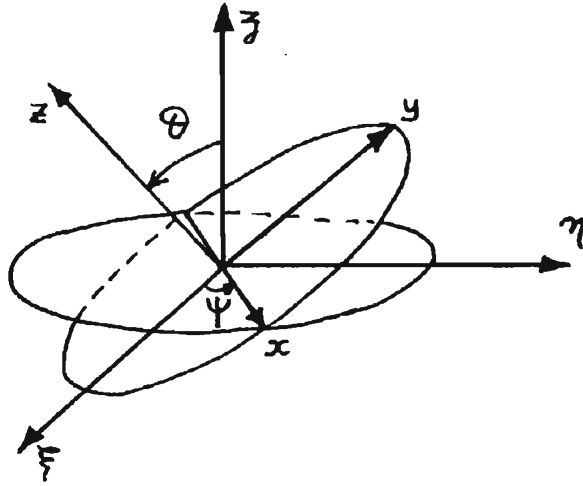
**Figura 3.4** *Angolo di precessione*

La prima rotazione (in senso antiorario, scelto come positivo) di un angolo  $\psi$ , detto **angolo di precessione**, è effettuata attorno all'asse individuato dal versore  $\mathbf{e}_3$ , che resta dunque invariato e porta la terna  $\Sigma$  a coincidere con una nuova terna  $\Sigma'$  di versori  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}_3)$ , ottenuti dall'applicazione della prima matrice di rotazione  $\mathbb{A}_\psi$  alla terna dei versori di  $\Sigma$  (si veda la Fig.

2.1). Il nuovo versore  $\mathbf{e}'_1$  individua adesso una retta, denominata **linea dei nodi**, e sarà di conseguenza indicato come  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La seconda rotazione, di un angolo  $\vartheta$ , detto **angolo di nutazione** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata avendo come asse la linea dei nodi e lascia quindi invariante il versore  $\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}'_1$ .

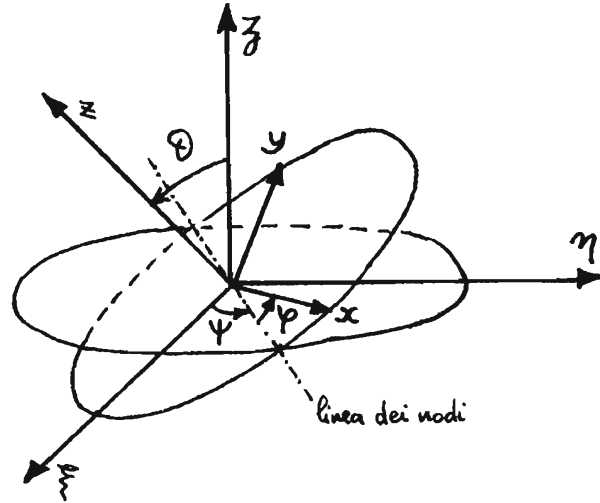


**Figura 3.5** Angolo di nutazione

Questa rotazione porta la terna  $\Sigma'$  in una nuova terna  $\Sigma''$ , di versori  $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$  che si ottengono dall'applicazione della seconda matrice di rotazione  $\mathbb{A}_\vartheta$  alla terna dei versori di  $\Sigma'$  (si veda la Fig. 2.2):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

La terza rotazione, di un angolo  $\varphi$ , detto **angolo di rotazione propria** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata attorno all'asse di versore  $\mathbf{e}''_3$ , che resta quindi invariato.



**Figura 3.6** Angolo di rotazione propria

Questa rotazione porta la terna  $\Sigma''$  nella terna solidale  $S$ , di versori  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3'')$  che si ottengono dall'applicazione della terza matrice di rotazione  $\mathbb{A}_\varphi$  alla terna dei versori di  $\Sigma''$  (si veda la Fig. 2.3):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

la trasformazione che lega i versori della terna  $S$  a quelli della terna fissa  $\Sigma$  è quindi data dal prodotto delle tre rotazioni:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbb{A}_\varphi \mathbb{A}_\vartheta \mathbb{A}_\psi \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

L'espressione inversa, ovvero la rappresentazione dei versori della terna fissa  $\Sigma$  per mezzo dei versori della terna solidale  $S$ , si ottiene dall'applicazione (in ordine inverso) delle trasposte delle matrici di rotazione:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T = (\mathbb{A}_\varphi \mathbb{A}_\vartheta \mathbb{A}_\psi)^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T = \mathbb{A}_\psi^T \mathbb{A}_\vartheta^T \mathbb{A}_\varphi^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T. \quad (3.19)$$

### 3.5

Dai risultati ottenuti per la composizione dei moti rigidi è immediato ottenere l'espressione della velocità di istantanea rotazione  $\vec{\omega}$  di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  come somma delle tre successive velocità di rotazione, corrispondenti alle tre trasformazioni che hanno portato  $\Sigma$  a coincidere con  $S$ ; ovvero:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}\mathbf{N} + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \quad (3.20)$$

La (3.22) costituisce una rappresentazione di  $\vec{\omega}$  in una base non ortogonale di versori, dove  $\mathbf{e}_3$  appartiene a  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ ,  $\mathbf{k}$  appartiene a  $\Sigma''$  e ad  $S$  e  $\mathbf{N}$  appartiene a  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$ . È particolarmente importante costruire la rappresentazione di  $\vec{\omega}$  nei versori della terna solidale  $S$ . Infatti, le equazioni di Eulero per la dinamica di un sistema rigido (II equazione cardinale)

$$\sigma(O)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \sigma(O)\vec{\omega} = \vec{M}_A^{ext}(O) + \vec{M}_R^{ext}(O) \quad (3.21)$$

sono immediatamente rappresentabili per componenti nel riferimento solidale  $S$ .

Ricordiamo il significato dei simboli:  $\sigma(O)$  è la matrice (omografia) di inerzia, nota (e quindi rappresentabile) solo in  $S$ ,  $O$  è un punto fisso (rispetto all'osservatore  $\Sigma$  o è il centro di massa del sistema rigido),  $\vec{M}_A^{ext}(O)$  e  $\vec{M}_R^{ext}(O)$  rappresentano, rispettivamente, il momento risultante rispetto ad  $O$  delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne.

Per rappresentare  $\vec{\omega}$  nella terna di versori del riferimento solidale  $S$ , occorre dunque trovare la rappresentazione di  $\mathbf{e}_3$  e di  $\mathbf{N}$  in  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Per ottenere l'espressione di  $\mathbf{N}$  basta tornare da  $S$  a  $\Sigma''$  con la matrice di rotazione  $\mathbb{A}_\varphi^T$ :

$$(\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'')^T = \mathbb{A}_\varphi^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T, \quad (3.22)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{N} = \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j}. \quad (3.24)$$

Per ottenere l'espressione di  $\mathbf{e}_3$ , basta tornare con la successiva rotazione inversa  $\mathbb{A}_\vartheta^T$  alla terna di  $\Sigma'$ , dato che  $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_3'$ , cioè:

$$(\mathbf{e}_1' \equiv \mathbf{N}, \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3' \equiv \mathbf{e}_3)^T = \mathbb{A}_\vartheta^T \mathbb{A}_\varphi^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T. \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \equiv \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j} \\ \sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

da cui si ottiene l'espressione di  $\mathbf{e}_3$  nella terna di versori solidali  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ :

$$\mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k} . \quad (3.27)$$

Sostituendo in (3.22) le espressioni trovate in (3.24) e (3.27), otteniamo la rappresentazione della velocità di istantanea rotazione della terna solidale  $S$ , rispetto a  $\Sigma$ , espressa per mezzo degli angoli di Eulero (coordinate lagrangiane) e delle loro derivate, nelle componenti del riferimento solidale, riferimento in cui possiamo rappresentare le equazioni di Eulero (3.21):

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi) \mathbf{i} + (\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi) \mathbf{j} + (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \mathbf{k} . \quad (3.28)$$

### 3.6 Composizione di moti rigidi

Consideriamo il moto di un punto  $P$ , solidale ad un osservatore identificato da una terna  $S'$  con origine nel punto  $O'$ , visto da altri due osservatori, generalmente in movimento fra loro e rispetto a  $S'$ . Siano  $\Sigma$ , con origine in  $\Omega$  ed  $S$ , con origine in  $O$ . Supponiamo che siano note le caratteristiche cinematiche di  $S'$  rispetto a  $S$  e di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  e vogliamo scrivere la velocità di  $P$  per l'osservatore  $\Sigma$ . Questo significa che l'osservatore  $S$  conosce la velocità di  $O'$  e la velocità di istantanea rotazione di  $S'$  rispetto a se stesso, ovvero  $\vec{v}(O')|_S$  e  $\vec{\omega}'|_S$  e che l'osservatore  $\Sigma$  conosce la velocità di  $O$  e la velocità di istantanea rotazione di  $S$  rispetto a se stesso, ovvero  $\vec{v}(O)|_\Sigma$  e  $\vec{\omega}|_\Sigma$ .

Usando le formule della cinematica relativa avremo:

$$\vec{v}(P)|_S = \vec{v}(O')|_S + \vec{\omega}'|_S \wedge (P - O') \quad (3.29)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{v}(P)|_\Sigma &= \vec{v}(P)|_S + \vec{v}(O)|_\Sigma + \vec{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) = \\ &= \vec{v}(O')|_S + \vec{\omega}'|_S \wedge (P - O') + \vec{v}(O)|_\Sigma + \vec{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Possiamo scomporre il termine

$$\vec{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O)$$

come

$$\vec{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) = \vec{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O') + \vec{\omega}|_\Sigma \wedge (O' - O) .$$

Ma

$$\vec{v}(O')|_S + \vec{v}(O)|_\Sigma + \vec{\omega}|_\Sigma \wedge (O' - O)$$

rappresenta la velocità di  $O'$  per l'osservatore  $\Sigma$ , quindi la (3.30) si scrive come

$$\vec{v}(P)|_{\Sigma} = \vec{v}(O')|_{\Sigma} + (\vec{\omega}'|_S + \vec{\omega}|_{\Sigma}) \wedge (P - O'). \quad (3.31)$$

La velocità di  $P$  in  $\Sigma$  si ottiene quindi sommando alla velocità in  $\Sigma$  dell'origine  $O'$  della terna solidale a  $P$  il termine di istantanea rotazione come somma dei vettori  $\vec{\omega}|_{\Sigma}$  e  $\vec{\omega}'|_S$ , che rappresentano l'istantanea rotazione di  $S$  rispetto a  $\Sigma$  e di  $S'$  rispetto ad  $S$ . Il vettore che rappresenta la rotazione istantanea “assoluta” (cioè per l'osservatore considerato fisso, in questo caso  $\Sigma$ ) si ottiene sommando le rotazioni istantanee di ciascun osservatore rispetto al precedente. La dimostrazione è indipendente dal numero di osservatori considerati e quindi vale per un numero qualsiasi di osservatori, ciascuno in moto (ovviamente rigido) rispetto all'altro.