

Capitolo 1

Sistemi di riferimento e sistemi di coordinate

1.1 La descrizione geometrica

Inizieremo lo studio del moto di sistemi materiali nello spazio riprendendo alcuni concetti elementari applicati al sistema più semplice, ovvero la particella o punto materiale. Per studiare il movimento di un punto P nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 occorre definire un osservatore Σ , costituito da una terna euclidea di origine O , individuata da una base ortonormale di versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, cui possiamo associare un sistema di coordinate cartesiane $\{x, y, z\}$, e da uno strumento per misurare il tempo (cronometro). Noi utilizzeremo sempre terne “di mano destra” o “levogire”, terne, cioè, per le quali le rotazioni positive sono quelle che, in verso antiorario, portano dal primo versore al secondo, dal secondo al terzo e dal terzo al primo.

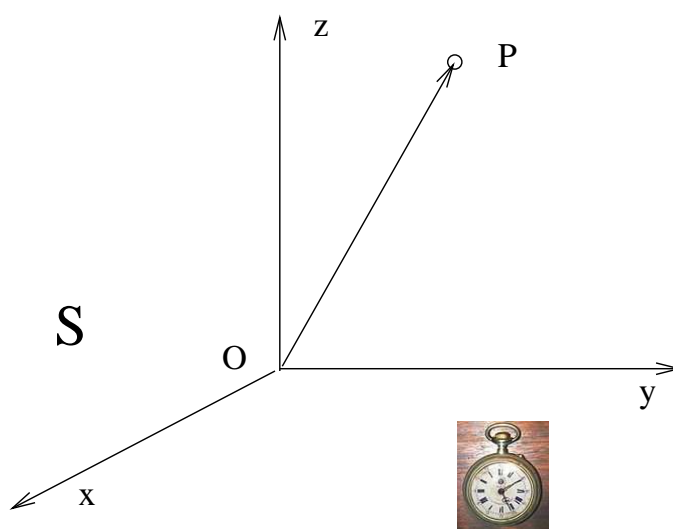


Figura 1.1

Poiché tutto quello che studieremo sarà nell'ambito dei Principi della Meccanica Classica e della Relatività galileiana, assumeremo per ipotesi che tutti gli osservatori misurino lo stesso tempo, indipendentemente dal loro moto relativo. Questo ci porterà ad identificare un osservatore con l'origine del suo riferimento e con la base di direzioni indipendenti da lui scelta, trascurando l'inessenziale caratterizzazione della misura del tempo.

Il vettore posizione che individua il punto P in S è così esprimibile attraverso la base di versori e le coordinate scelte:

$$\vec{r}_P := (P - O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Come sopra indicato, useremo la notazione $(P - O)$ per indicare un vettore che ha per modulo la distanza fra i punti P ed O , direzione la retta passante per i due punti e verso quello che va da O a P (dal secondo al primo punto). Questa notazione è molto comoda, come vedremo in seguito, per l'operazione di somma fra vettori, riducendola formalmente al semplice calcolo letterale algebrico.

Per descrivere la posizione di un punto nello spazio possono essere usati diversi sistemi di coordinate ed anche diverse basi (generalmente ortonormali), attraverso le quali esprimere il vettore posizione. Iniziamo dal semplice caso piano.

1.2 Coordinate e basi ortonormali nel piano

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^2 possiamo introdurre, oltre ad un sistema di coordinate cartesiane $\{x, y\}$ associate ad una base ortonormale di versori, che indicheremo con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, il sistema delle coordinate polari $\{r, \phi\}$.

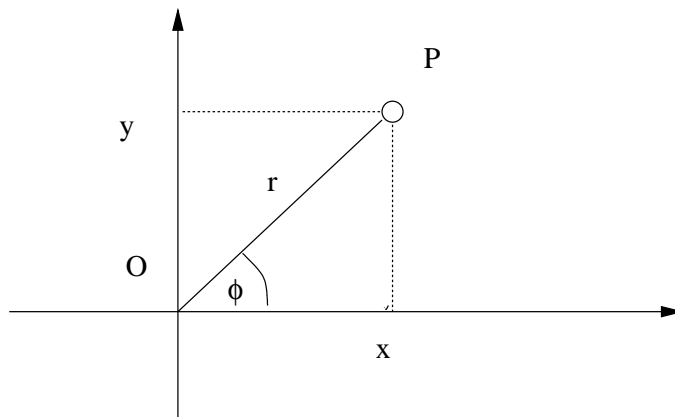


Figura 1.2

Il passaggio da un sistema di coordinate all'altro si ottiene per via trigonometrica elementare

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi, \end{cases} \quad (1.1)$$

La relazione inversa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2)$$

non risulta tuttavia definita per ogni coppia $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$.

Il fatto è che le trasformazioni di coordinate sono accettabili in un dominio in cui le relazioni risultino invertibili, ovvero se vogliamo passare, ad esempio, dalla coppia $\{x, y\}$ ad una qualunque nuova coppia di coordinate, che indicheremo con $\{q_1, q_2\}$, la trasformazione

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

deve essere invertibile. Questo significa che la matrice jacobiana associata alla (1.3)

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

deve avere determinante non nullo. Nel caso del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari, posto $q_1 = r$ e $q_2 = \phi$, avremo

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r.$$

La trasformazione di coordinate risulta quindi invertibile solo per $r \neq 0$.

Al sistema di coordinate polari risulta "naturale" associare una base ortonormale indotta dalle coordinate stesse. Se indichiamo con \mathbf{u}_r il versore $\frac{(P-O)}{r}$ (r è il modulo di $(P - O)$), potremo esprimere in modo molto semplice il vettore posizione:

$$(P - O) = r\mathbf{u}_r, \quad \text{dove} \quad \mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}. \quad (1.4)$$

Resta da individuare un secondo versore indipendente che completi la nuova base di \mathbb{R}^2 . Vedremo quale sarà la scelta conveniente quando affronteremo la cinematica del punto nel piano.

1.3 Coordinate e basi ortonormali nello spazio

Coordinate sferiche Consideriamo adesso alcuni sistemi di coordinate particolarmente importanti per descrivere la posizione di un punto nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , iniziando dalle coordinate sferiche (si veda la Fig. 1.3). Questo sistema di coordinate è particolarmente utile, quando le condizioni geometriche (ad esempio, il punto è vincolato a muoversi su di una superficie sferica) oppure fisiche (punto materiale soggetto ad un campo di forze centrale: attrazione gravitazionale, forze elettrostatiche coulombiane).

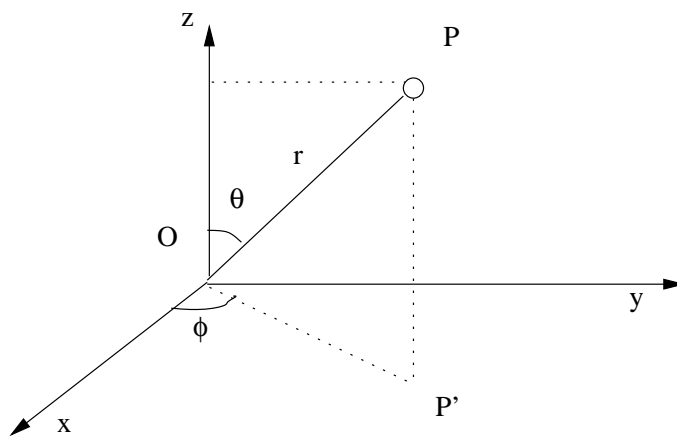


Figura 1.3

Come si deduce facilmente dalla figura, la trasformazione da coordinate cartesiane a polari sferiche risulta

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta , \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.5)$$

mentre la trasformazione inversa è

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} . \end{cases} \quad (1.6)$$

Come nel caso delle coordinate polari piane, possiamo determinare il dominio di invertibilità della trasformazione per mezzo del calcolo dello Jacobiano:

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta .$$

La trasformazione risulta quindi singolare per $r = 0$ e per $\sin \theta = 0$. Per questi valori non c'è corrispondenza biunivoca fra una terna cartesiana ed una terna polare sferica.

Coordinate cilindriche Seguendo le stesse considerazioni introdotte per le coordinate sferiche, un diverso sistema di coordinate può essere scelto se proprietà geometriche o fisiche inducono simmetrie di tipo cilindrico. Questo sistema di coordinate in \mathbb{R}^3 fa uso delle coordinate polari piane (per individuare la posizione della proiezione ortogonale P' del punto P sul piano $\{x, y\}$ e della quota z per completare la terna.

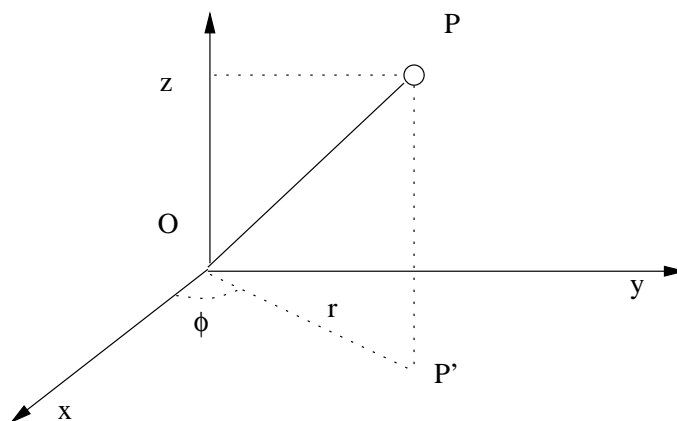


Figura 1.4

La trasformazione risulta quindi

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi . \\ z \equiv z \end{cases} \quad (1.7)$$

Lo Jacobiano di questa trasformazione di coordinate risulta una semplice “estensione” a dimensione 3 di quello relativo alle coordinate polari piane:

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r .$$

La trasformazione è dunque singolare (e quindi non invertibile) come nel caso piano.

Coordinata intrinseca

Le ipotesi sotto le quali studieremo il moto di un punto nello spazio garantiscono che esso descriverà nel tempo una curva regolare in \mathbb{R}^3 (traiettoria). Questo significa che, dal punto di vista matematico, tale luogo geometrico è rappresentabile da una funzione, almeno di classe \mathcal{C}^2 , da un intervallo aperto $(a, b) \in \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^n (per noi i casi di interesse saranno $n = 2, 3$):

$$P(q) = \begin{cases} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{cases} ,$$

dove $q \in (a, b)$. q è il parametro scelto per rappresentare la curva e le ipotesi di regolarità della funzione garantiscono l'esistenza di tangente e normale in ogni punto della curva.

Questa rappresentazione del vettore posizione ($P-O$) richiede evidentemente che la traiettoria sia nota (il che non significa che sia noto il moto) ed è di fondamentale importanza quando studieremo il moto di un punto vincolato ad una linea, ma, come vedremo nello studio della cinematica, porta anche a risultati fondamentali su velocità ed accelerazione del punto, che esso sia libero o vincolato.

Particolare interesse, per il fine sopra esposto, ha la rappresentazione parametrica della traiettoria per mezzo del cosiddetto parametro d'arco s , che misura la lunghezza dell'arco di curva percorso. Poiché

$$s_{\widehat{P_0P}} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} dq$$

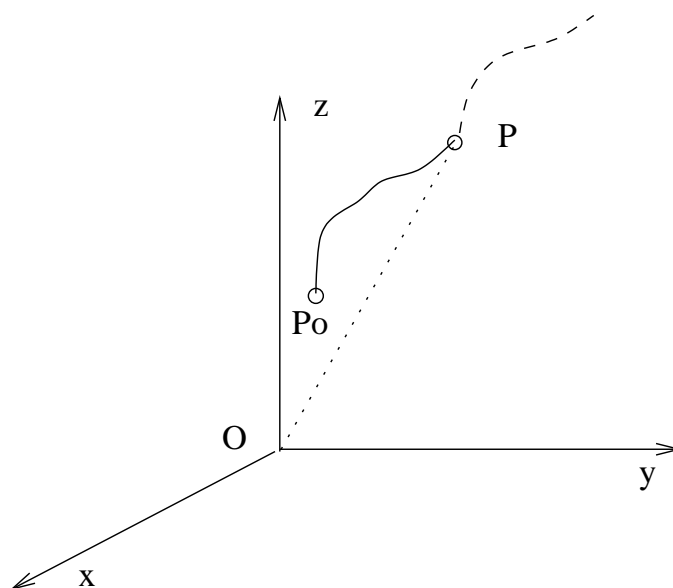


Figura 1.5

risulterà

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} dq$$

Ricordiamo, in chiusura di paragrafo, che la trasformazione del sistema di coordinate, da cartesiane ad altre qualsiasi, implica una diversa descrizione della geometria dello spazio e, quindi, anche di aree e volumi da considerare. L'elemento di area $dx dy$, espresso in coordinate cartesiane, si trasforma in $|\det \mathbb{J}| dq_1 dq_2$ per la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases}$$

e l'elemento di volume $dx dy dz$, espresso in coordinate cartesiane, si trasforma in $|\det \mathbb{J}| dq_1 dq_2 dq_3$ per la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} .$$

1.4 Cinematica del punto

Ricordiamo le fondamentali definizioni di velocità \mathbf{v} ed accelerazione \mathbf{a} di un punto P rispetto ad un osservatore “fisso” S , rappresentato da una terna euclidea di origine O e direzioni ortogonali (riferimento di mano destra)

individuare dai versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{v} := \frac{d(P - O)}{dt}, \quad \mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2(P - O)}{dt^2}.$$

Poiché per l'osservatore S , l'origine O e le direzioni individuate dalla terna di versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono fisse (e quindi costanti nel tempo), la rappresentazione di velocità ed accelerazione mediante le coordinate cartesiane associate alla base di versori fissi risulta immediata:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Se si desidera utilizzare un diverso sistema di coordinate, mantenendo però la rappresentazione di velocità ed accelerazione secondo le direzioni della terna fissa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, sarà sufficiente derivare rispetto al tempo le relazioni che rappresentano il cambiamento di coordinate. Ad esempio, se vogliamo utilizzare la rappresentazione in coordinate cilindriche avremo per la velocità

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi, \\ \dot{z} \equiv \dot{z} \end{cases} \quad (1.9)$$

e per l'accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi, \\ \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \phi, \\ \ddot{z} \equiv \ddot{z} \end{cases} \quad (1.10)$$

Naturalmente, nel caso piano ($z = 0$) di passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari piane, le relazioni fra le componenti di velocità ed accelerazione si riducono alle prime due di (1.9) e (1.10).

Si lascia per esercizio il calcolo delle componenti di velocità ed accelerazione nel caso di passaggio da coordinate cartesiane a polari sferiche.

Velocità ed accelerazione in basi “mobili”

Abbiamo già accennato al fatto che la scelta di un sistema di coordinate è in generale suggerito dalle proprietà di simmetria indotte dalla geometria dello spazio in cui il punto si muove o da quelle del campo di forze a cui è soggetto. Se il punto materiale P è costretto a muoversi su di una superficie sferica, oppure, libero di muoversi in \mathbb{R}^3 , è sottoposto ad una forza centrale (ad esempio, attrazione gravitazionale, forza elettrostatica coulombiana, etc..), allora, oltre a ricorrere al sistema di coordinate adatto, è conveniente e, in generale, necessario per una “lettura” il più possibile semplice del moto di P , ricorrere

ad una scomposizione dei vettori velocità ed accelerazione secondo direzioni che non sono quelle fisse dell'osservatore S . Ogni terna di coordinate in \mathbb{R}^3 suggerisce un sistema associato di tre versori indipendenti (e, se possibile, ortogonali fra loro), attraverso i quali risulta possibile rappresentare qualunque vettore dello spazio. Inizieremo dal semplice caso delle coordinate polari piane (Fig. 1.2). Prima di affrontarlo, però, premettiamo una semplice, ma fondamentale, osservazione: per una qualsiasi grandezza vettoriale \mathfrak{V} di modulo costante, la sua derivata rispetto al tempo è ortogonale a \mathfrak{V} stessa. Infatti se

$$\|\mathfrak{V}\| = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \|\mathfrak{V}\|^2 = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} = \text{costante}$$

e, di conseguenza

$$\frac{d}{dt}\|\mathfrak{V}\|^2 = 2\mathfrak{V} \cdot \frac{d}{dt}\mathfrak{V} = 0.$$

Quindi, se $\frac{d}{dt}\mathfrak{V} \neq 0$ (ovvero se \mathfrak{V} non è costante, ma solo di modulo costante), allora la sua derivata rispetto al tempo è ortogonale a \mathfrak{V} stessa. Questo risultato è ovviamente valido per derivate temporali dei versori (vettori di modulo unitario), che non abbiano direzione costante nel tempo rispetto all'osservatore prescelto.

Base polare piana

Abbiamo visto in (1.4) come il vettore posizione ($P - O$) sia rappresentabile con semplicità utilizzando la direzione associata alla coordinata radiale r . Tuttavia, se P si muove rispetto all'osservatore, il versore \mathbf{u}_r cambierà in generale direzione. Se vogliamo mantenere questa rappresentazione dovremo quindi procedere nel modo seguente

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}. \quad (1.11)$$

Sappiamo che il vettore $\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$, se non è nullo, è ortogonale a \mathbf{u}_r . In questo caso possiamo facilmente calcolarlo dalla sua rappresentazione rispetto alla base di versori fissi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ presente in (1.4):

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{\phi}(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}). \quad (1.12)$$

È immediato riconoscere in $(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})$ un vettore di modulo unitario, ortogonale a \mathbf{u}_r . Indicando con \mathbf{u}_ϕ quest'ultimo versore, abbiamo completato la base ortonormale $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, associata alle coordinate polari piane, attraverso la quale possiamo rappresentare un qualunque vettore di \mathbb{R}^2 . In questa rappresentazione la velocità assume la forma

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\phi}\mathbf{u}_\phi, \quad (1.13)$$

con

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}. \quad (1.14)$$

Per la rappresentazione dell'accelerazione dobbiamo ancora calcolare $\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}$. Sappiamo che il risultato darà un vettore ortogonale a \mathbf{u}_ϕ e, quindi, necessariamente, parallelo a \mathbf{u}_r . Usando ancora la rappresentazione di \mathbf{u}_ϕ sulla base fissa, avremo

$$\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) = -\dot{\phi} \mathbf{u}_r. \quad (1.15)$$

Dalle (1.12) e (1.15) risulta immediato esprimere l'accelerazione di P nei termini delle coordinate polari e della base ortonormale da loro indotta:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{u}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{u}_\phi. \quad (1.16)$$

Le coordinate polari piane costituiscono la scelta naturale per studiare moti circolari con centro nell'origine. Tuttavia le proprietà fondamentali di tali moti non emergerebbero senza l'uso della base $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, associata alle coordinate stesse. In un moto circolare con centro in O abbiamo $r = \text{costante}$ e quindi $\dot{r} = 0$. Le (1.13) e (1.16) si riducono quindi a

$$\mathbf{v} = r\dot{\phi} \mathbf{u}_\phi,$$

$$\mathbf{a} = -r\dot{\phi}^2 \mathbf{u}_r + r\ddot{\phi} \mathbf{u}_\phi,$$

dove si evidenzia che la velocità è tangente alla traiettoria e che l'accelerazione è scomponibile in una parte centripeta $-r\dot{\phi}^2 \mathbf{u}_r$, sempre presente ed una tangenziale $r\ddot{\phi} \mathbf{u}_\phi$, che è nulla se il moto è uniforme ($\dot{\phi} = \text{costante}$).

In conclusione, è importante notare che l'osservatore che scrive le caratteristiche cinematiche del moto del punto P non è più l'osservatore "fisso" $S \equiv \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, ma l'osservatore "mobile" $S' \equiv \{O; \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, per il quale nascono termini di accelerazione di tipo centripeto ($-r\dot{\phi}^2$) e di tipo Coriolis ($2\dot{r}\dot{\phi}$), che nell'ambito dinamico danno luogo alle corrispondenti cosiddette forze inerziali o apparenti.

Trascuriamo il caso della cinematica in coordinate cilindriche, con corrispondente base di versori $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}, \mathbf{k}$, perché si tratta di una banale estensione del caso appena discusso.

Base polare sferica Partiamo, analogamente a quanto fatto nel caso polare piano, esprimendo il vettore posizione ($P - O$) per mezzo del versore $\mathbf{u}_r = \frac{(P-O)}{r}$, dove (si veda la Fig. 1.3) il versore, rappresentato nella base fissa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, assume la forma

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (1.17)$$

Base intrinseca

Come abbiamo già accennato in un precedente paragrafo, le ipotesi di regolarità del moto, sotto le quali lavoriamo, ci consentono di assumere che la traiettoria di un punto P , mobile rispetto ad un osservatore S , sia una curva (in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) rettificabile, per la quale, in ogni punto, sono definite la direzione tangente e quella normale (per questo basta che la funzione da $\mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, dove I è un intervallo aperto, sia di classe \mathcal{C}^2). Ad ogni istante $t > t_0$ corrisponderà una lunghezza di arco di traiettoria $s = s(t)$ percorso da P nell'intervallo di tempo considerato. Se pensiamo che il vettore posizione $(P - O)$ sia funzione del tempo t attraverso la lunghezza s dell'arco di traiettoria percorso a partire dall'istante iniziale t_0 (si veda la Fig. 1.5), avremo che $(P - O) = (P(s(t)) - O)$. Questa interpretazione ha una grande importanza per rilevare le proprietà fondamentali delle caratteristiche cinematiche (velocità ed accelerazione) del moto del punto.

Iniziamo dalla velocità

$$\mathbf{v} = \frac{dP(s(t))}{dt} = \frac{dP}{ds} \dot{s}. \quad (1.18)$$

Sappiamo che $\frac{dP}{ds}$ è un vettore tangente alla curva, ma s non è un parametro qualsiasi bensì il parametro che misura la lunghezza dell'arco di traiettoria percorsa. Si può provare che

$$\frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P(s + \Delta s) - P(s)}{\Delta s} = \mathbf{t}, \quad (1.19)$$

dove \mathbf{t} ha modulo unitario ed è quindi un versore. La (1.18) si scrive quindi come

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{t}. \quad (1.20)$$

La scelta della descrizione parametrica della traiettoria per mezzo del parametro s , detto **ascissa curvilinea** mette in luce la proprietà fondamentale del vettore velocità, quella cioè di essere sempre tangente alla traiettoria; inoltre $|\mathbf{v}| := v = |\dot{s}|$.

Consideriamo adesso l'espressione dell'accelerazione, derivando rispetto al tempo la (1.20)

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{dt}. \quad (1.21)$$

Il vettore $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ è un vettore ortogonale a \mathbf{t} e considerando \mathbf{t} come funzione del tempo t attraverso l'ascissa curvilinea s , ovvero $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s(t))$, otteniamo la seguente espressione

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

dove $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ è ancora, ovviamente, un vettore ortogonale a \mathbf{t} . Poniamo, per definizione

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} := \frac{\mathbf{n}}{\rho},$$

dove

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|,$$

che ha le dimensioni di una lunghezza, ne rappresenta il modulo e \mathbf{n} è un versore ortogonale a \mathbf{t} ed individua la cosiddetta **normale principale**. L'accelerazione può dunque essere rappresentata nel modo seguente:

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}. \quad (1.22)$$

Come si vede dalla (1.22), l'accelerazione di un punto P , che si muove in \mathbb{R}^3 , può essere rappresentata da due sole componenti, una tangente alla traiettoria (nulla se il moto è uniforme, se cioè $v = \text{costante}$), ed una normale alla traiettoria (sempre presente, a meno che la traiettoria sia rettilinea: $\rho = \infty$). La terna intrinseca in \mathbb{R}^3 è completata dal **versore binormale**, $\mathbf{b} := \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, lungo la cui direzione non vi sono componenti delle caratteristiche cinematiche del moto del punto (velocità e accelerazione).

Esempio:Moto circolare

Calcoliamo i versori \mathbf{t} ed \mathbf{n} in un moto sulla circonferenza di centro O (origine del riferimento) e raggio R , che descriviamo parametricamente per mezzo dell'ascissa curvilinea $s = R\phi$ (si veda la Fig. 1.2):

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{s}{R} \\ y = R \sin \frac{s}{R}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Otteniamo così

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds} = -\sin \frac{s}{R}\mathbf{i} + \cos \frac{s}{R}\mathbf{j} \quad (1.24)$$

e

$$\mathbf{n} = \rho \frac{d\mathbf{t}}{ds} = R(-\cos \frac{s}{R}\mathbf{i} - \sin \frac{s}{R}\mathbf{j}). \quad (1.25)$$

Confrontando le (1.24) e (1.25) con le (1.14), si ottiene

$$\mathbf{t} = \mathbf{u}_\phi, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{u}_r, \quad \rho = R. \quad (1.26)$$

Si osserva così che il versore normale ha il segno opposto a quello radiale ed è quindi centripeto e che il raggio di curvatura è il raggio della circonferenza percorsa.