

Capitolo 2

Cinematica relativa

Consideriamo un punto P in \mathbb{R}^3 , la cui posizione viene rilevata da due diversi osservatori, $\Sigma \equiv \{\Omega; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ed $S \equiv \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

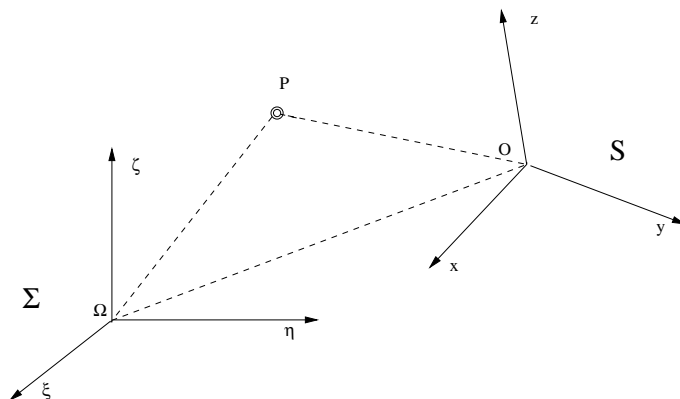


Figura 2.1

Σ rappresenta il vettore posizione $(P - \Omega)$ secondo la scelta delle sue direzioni “fisse” $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e le corrispondenti coordinate $\{\xi, \eta, \zeta\}$, mentre S rappresenta il vettore posizione $(P - O)$ secondo la sua base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e le corrispondenti coordinate $\{x, y, z\}$. Ovvero:

$$(P - \Omega)_\Sigma = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3, \quad (P - O)_S = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Tuttavia sussisterà sempre la relazione

$$(P - O) = (P - \Omega) + (\Omega - O) \quad (2.2)$$

che sarà valida, indipendentemente dalla scelta della rappresentazione. Il vettore $(\Omega - O)$, che individua la separazione fra le origini dei due riferimenti,

può, ovviamente, essere rappresentato sia da Σ che da S . Privilegiamo, in modo del tutto arbitrario, Σ e rappresentiamo $\Omega - O$ nel suo riferimento. Dal punto di vista della rappresentazione avremo dunque

$$(P - \Omega)_{\Sigma} + (\Omega - O)_{\Sigma} = (P - O)_S, \quad (2.3)$$

che, espresso esplicitamente, si scrive

$$(\xi - \xi_O)\mathbf{e}_1 + (\eta - \eta_O)\mathbf{e}_2 + (\zeta - \zeta_O)\mathbf{e}_3 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (2.4)$$

che esprime la relazione che sussiste fra coordinate e basi ortonormali dei due diversi osservatori. La relazione precedente consente di esplicitare le coordinate di S in funzione di quelle di Σ e viceversa. Se proiettiamo la (2.4) sui tre versori della base di S , moltiplicandola scalarmente, rispettivamente per \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , otteniamo

$$\begin{cases} x = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}) \\ y = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{j}) \\ z = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k}). \end{cases} \quad (2.5)$$

Quindi, posto

$$\begin{cases} \alpha_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}, & \alpha_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}, & \alpha_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i} \\ \beta_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j}, & \beta_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j}, & \beta_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{j} \\ \gamma_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}, & \gamma_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}, & \gamma_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k}, \end{cases} \quad (2.6)$$

possiamo rappresentare la (2.5) come una trasformazione lineare in \mathbb{R}^3 :

$$(x, y, z)^T = \mathbb{A}(\xi - \xi_O, \eta - \eta_O, \zeta - \zeta_O)^T, \quad (2.7)$$

dove il simbolo T indica il trasposto del vettore riga (ovvero il vettore colonna) e la matrice \mathbb{A} , detta **matrice dei coseni direttori** o **matrice di rotazione** è definita come

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Osserviamo che le righe della matrice \mathbb{A} rappresentano le componenti dei versori, rispettivamente \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} espressi nel riferimento di Σ , sono quindi

vettori fra loro ortogonali. La stessa considerazione vale per le colonne di \mathbf{A} , che rappresentano le componenti dei versori di Σ , rispettivamente $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, nella base di S . Ricordiamo inoltre che fra i versori della base di S (ed analogamente per quelli della base di Σ) sussistono le relazioni di ortonormalità:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \sum_{h=1}^3 \alpha_h^2 = \mathbf{j}^2 = \sum_{h=1}^3 \beta_h^2 = \mathbf{k}^2 = \sum_{h=1}^3 \gamma_h^2 = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \sum_{h=1}^3 \alpha_h \beta_h = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \gamma_h = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \sum_{h=1}^3 \gamma_h \alpha_h = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il fatto che sussistano sei relazioni indipendenti che legano fra loro i nove coefficienti della matrice ci dice che tali coefficienti possono essere tutti espressi attraverso la scelta di tre opportuni parametri (angoli) fra loro indipendenti. Vedremo più avanti una possibile scelta.

La matrice \mathbb{A} , essendo formata da tutti coefficienti reali, ha sicuramente determinante reale. Possiamo verificare che non è nullo, valutando il determinante del prodotto con la matrice trasposta:

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Avremo quindi

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Dalle (2.10) si ottiene immediatamente

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \quad (2.13)$$

dove \mathbb{I} rappresenta la matrice identità. Per le proprietà del determinante del prodotto di matrici quadrate abbiamo

$$\det(\mathbb{A}^T \mathbb{A}) = \det \mathbb{A}^T \det \mathbb{A} = (\det \mathbb{A})^2 = 1. \quad (2.14)$$

Il determinante di \mathbb{A} è necessariamente 1 o -1 . La matrice \mathbb{A} rappresenta quindi un'isometria (conserva le misure e le relazioni angolari fra i vettori a cui è applicata). Proveremo più avanti che il suo determinante vale, in effetti, 1. \mathbb{A} è quindi una **matrice ortogonale**; poiché, avendo determinante non nullo (matrice non singolare), ammette la matrice inversa \mathbb{A}^{-1} , tale che

$$\mathbb{A}^{-1} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad (2.15)$$

ne segue la fondamentale proprietà

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T. \quad (2.16)$$

Questo risultato ci permette di scrivere la relazione inversa della (2.8), che esprime le coordinate di P ed O in Σ in funzione delle coordinate di P in S :

$$(\xi - \xi_O, \eta - \eta_O, \zeta - \zeta_O)^T = \mathbb{A}^T (x, y, z)^T. \quad (2.17)$$

Le matrici \mathbb{A} e \mathbb{A}^T , come è facile verificare dalle relazioni (2.6), servono anche per esprimere i versori della base di S in funzione di quelli di Σ e viceversa:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T &= \mathbb{A}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T, \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T &= \mathbb{A}^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Matrici di rotazione

Osserviamo che la matrice \mathbb{A} è un operatore lineare nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 . Ovvero, se applichiamo \mathbb{A} ad un vettore $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, otteniamo, in generale, un nuovo vettore $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{A}\mathbf{r} = \mathbf{r}'.$$

Poiché \mathbb{A} è una matrice unitaria, avremo che $\|\mathbb{A}\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}\|$ e quindi $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\|$. Il modulo del vettore viene quindi conservato nella trasformazione.

Vediamo il significato dell'applicazione di \mathbb{A} nel caso piano. Appliciamo la matrice \mathbb{A} ad un vettore \mathbf{r} di \mathbb{R}^2 , di componenti ξ ed η :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Il vettore $\mathbf{r}' = (\xi', \eta')^T$, visto come il trasformato di $(\xi, \eta)^T$ nel riferimento di Σ , dopo l'applicazione dell'operatore lineare \mathbb{A} , risulta essere il vettore \mathbf{r} ruotato "all'indietro" (cioè in verso orario) dell'angolo θ . È semplice verificare questa affermazione. Facendo riferimento alla Fig. 1.2, possiamo scrivere

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} = r(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}). \quad (2.20)$$

Il vettore \mathbf{r}' che si ottiene ruotando in senso orario \mathbf{r} di un angolo θ si scrive facilmente dalla (2.20) come

$$\mathbf{r}' = r(\cos(\phi-\theta)\mathbf{i} + \sin(\phi-\theta)\mathbf{j}) = (r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta)\mathbf{i} + (r \sin \phi \cos \theta - r \cos \phi \sin \theta)\mathbf{j}. \quad (2.21)$$

Introducendo nella (2.21) le componenti ξ e η di \mathbf{r} otteniamo dunque

$$\mathbf{r}' = (\xi', \eta')^T = (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta, -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta)^T = \mathbb{A}\mathbf{r}. \quad (2.22)$$

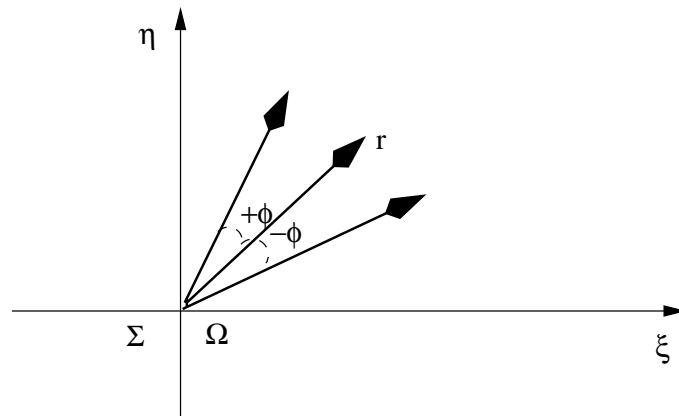


Figura 2.2

La rotazione “in avanti” (cioè nel verso positivo antiorario) si ottiene applicando ad \mathbf{r} la matrice trasposta \mathbb{A}^T .

Riprendiamo il caso più generale delle trasformazioni in \mathbb{R}^3 .

Velocità rispetto a due osservatori

Riprendiamo la relazione intrinseca (2.3) e deriviamola rispetto al tempo. Per mantenere l'uguaglianza dopo la derivazione, la derivata deve essere fatta da un solo osservatore per entrambi i membri. Scegliamo Σ , che indicheremo come l'**osservatore fisso**:

$$\frac{d}{dt_\Sigma} [(P - \Omega)_\Sigma + (\Omega - O)_\Sigma] = \frac{d}{dt_\Sigma} (P - O)_S, \quad (2.23)$$

dove $\frac{d}{dt_\Sigma}$ indica la derivata temporale effettuata da Σ rispetto al proprio tempo. Se riscriviamo la (2.23) esplicitamente per mezzo delle coordinate e dei versori scelti dai due osservatori Σ ed S , otteniamo

$$\frac{d}{dt_\Sigma} [(\xi - \xi_O)\mathbf{e}_1 + (\eta - \eta_O)\mathbf{e}_2 + (\zeta - \zeta_O)\mathbf{e}_3] = \frac{d}{dt_\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \quad (2.24)$$

L'osservatore Σ vede fissi i propri versori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, mentre, in generale, vede variare le direzioni dei versori di S , $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Ricordando che il tempo è lo stesso per tutti gli osservatori ($t_\Sigma = t_S = t$), la (2.24) si scrive

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3 \right) - \left(\dot{\xi}_O\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}_O\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}_O\mathbf{e}_3 \right) \\ & = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + \left(x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

I due vettori al primo membro rappresentano la velocità del punto P e dell'origine O di S , osservati da Σ , che riscriveremo intrinsecamente come \mathbf{v}_Σ e $\mathbf{v}_{O,\Sigma}$, mentre il primo vettore al secondo membro rappresenta la velocità di P osservata da S (che vede i propri versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ fissi) e sarà indicata con \mathbf{v}_S . Le velocità caratterizzate dal pedice Σ sono generalmente denominate **velocità assolute**, mentre quelle caratterizzate dal pedice S sono definite **velocità relative**. Queste definizioni, di largo uso, derivano da un privilegio del tutto arbitrario che abbiamo assegnato all'osservatore Σ , decidendo che sia esso ad operare le derivate temporali. In ambito di Cinematica classica tutti gli osservatori sono equivalenti, al contrario della situazione in Dinamica, dove solo gli osservatori inerziali sono privilegiati per scrivere le Leggi di Newton e sono fra loro equivalenti.

Per completare la formula della Cinematica relativa, occorre trovare un'espressione rappresentabile per il secondo vettore del secondo membro di (2.25).

Le formule di Poisson ed il vettore $\vec{\omega}$

Poiché $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono versori, le loro derivate rispetto al tempo sono vettori a loro ortogonali. Esprimiamo questa proprietà per mezzo del prodotto vettoriale con vettori da determinare:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}}{dt} &:= \vec{\omega}_1 \wedge \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &:= \vec{\omega}_2 \wedge \mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &:= \vec{\omega}_3 \wedge \mathbf{k} .\end{aligned}\tag{2.26}$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale, è evidente che ciascuno dei vettori $\omega_i, i = 1, 2, 3$, ha una componente che può essere scelta in modo arbitrario. Infatti, posto

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &= \omega_{1x}\mathbf{i} + \omega_{1y}\mathbf{j} + \omega_{1z}\mathbf{k} \\ \vec{\omega}_2 &= \omega_{2x}\mathbf{i} + \omega_{2y}\mathbf{j} + \omega_{2z}\mathbf{k} \\ \vec{\omega}_3 &= \omega_{3x}\mathbf{i} + \omega_{3y}\mathbf{j} + \omega_{3z}\mathbf{k} ,\end{aligned}\tag{2.27}$$

le componenti $\omega_{1x}, \omega_{2y}, \omega_{3z}$ non danno alcun contributo ai prodotti vettoriali definiti in (2.26). Per scrivere le (2.26) abbiamo sfruttato le proprietà di normalizzazione dei versori (vettori a modulo costante), ma non abbiamo ancora usato le proprietà di ortogonalità in (2.9). In particolare, poiché tutti i prodotti scalari fra versori diversi sono nulli, saranno nulle anche le loro derivate rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \omega_{1z} - \omega_{2z} , \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \omega_{2x} - \omega_{3x} , \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \omega_{3y} - \omega_{1y} .\end{aligned}\tag{2.28}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}\omega_{1z} &= \omega_{2z} = \omega_z , \\ \omega_{2x} &= \omega_{3x} = \omega_x , \\ \omega_{3y} &= \omega_{1y} = \omega_y .\end{aligned}\tag{2.29}$$

siamo riusciti ad esprimere le tre derivate in (2.26) per mezzo di un solo vettore

$$\vec{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \quad (2.30)$$

rappresentato nel riferimento dell'osservatore S .

Possiamo provare che la derivata temporale di una qualunque grandezza vettoriale rappresentata in S può essere espressa attraverso il prodotto vettoriale con il vettore $\vec{\omega}$. sia infatti \mathbf{V} una qualunque grandezza vettoriale. La sua rappresentazione in S sarà dunque

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}.$$

La sua derivata rispetto al tempo, effettuata dall'osservatore Σ , sarà dunque

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \left[\dot{V}_x \mathbf{i} + \dot{V}_y \mathbf{j} + \dot{V}_z \mathbf{k} \right] + \left[V_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + V_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + V_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right] \quad (2.31)$$

e per le (2.26) e (2.30)

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_S + \vec{\omega} \wedge \mathbf{V}, \quad (2.32)$$

dove il primo termine al secondo membro della (2.31) è interpretato come la derivata di \mathbf{V} fatta da S (che vede i propri versori costanti) ed il secondo termine al secondo membro è conseguenza della formula ottenuta per le derivate dei versori. È immediato vedere che, se \mathbf{V} è un vettore costante in S , allora

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{V}. \quad (2.33)$$

Proviamo adesso che, dati Σ ed S , il vettore $\vec{\omega}$ è unico.

Consideriamo adesso il caso di un qualunque versore \mathbf{u} di S . Sappiamo che la sua derivata rispetto al tempo, effettuata da Σ , può essere rappresentata dal prodotto vettoriale con $\vec{\omega}$:

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{u} \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{u}.$$

Supponiamo che esista un altro vettore $\vec{\omega}'$ tale che

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{u} \right|_{\Sigma} = \vec{\omega}' \wedge \mathbf{u}.$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\bar{\mathbf{0}} = (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \wedge \mathbf{u},$$

che, per l'arbitrarietà di \mathbf{u} , implica

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

e, quindi, l'unicità del vettore $\vec{\omega}$.

Rappresentazione di $\vec{\omega}$

Iniziamo considerando il caso di due osservatori “piani”, ovvero di due osservatori, rispettivamente Σ ed S , che, durante il loro moto relativo, mantengano costantemente parallele fra loro due direzioni (ad esempio \mathbf{e}_3 e \mathbf{k}).

¹ In questo caso è semplice mettere in relazione le direzioni individuate dai versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ di S e quelle individuate dai versori di Σ , $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ per mezzo di un solo angolo. Infatti, sia ad esempio ϕ l'angolo formato dalle direzioni positive individuate da \mathbf{e}_1 e \mathbf{i} , avremo che (si veda la Fig. 1.7)

$$\mathbf{i} = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{j} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 .$$

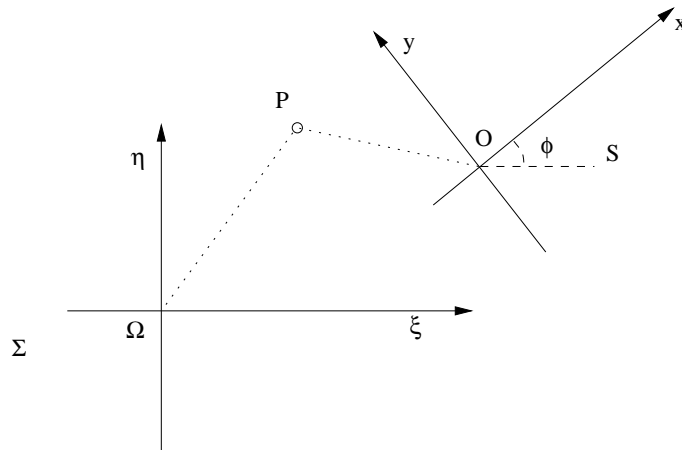


Figura 2.3

La matrice dei coseni direttori (matrice di rotazione), in questo caso si scrive esplicitamente in funzione del solo angolo ϕ ed essendo $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$, avremo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

¹In generale, per rappresentare $\vec{\omega}$ per mezzo della derivata temporale di una coordinata angolare, basta che due versori, ad esempio \mathbf{e}_3 e \mathbf{k} , mantengano costante l'angolo fra le loro direzioni. Per semplicità abbiamo scelto che questo angolo sia costantemente nullo.

che, per trasformazioni che interessano solo vettori o coordinate del piano comune ai due osservatori, può essere usata nella forma ridotta di matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Sappiamo dalle formule di Poisson che possiamo esprimere le derivate temporali di \mathbf{i} e \mathbf{j} , effettuate da Σ , per mezzo del prodotto vettoriale a sinistra con il vettore $\vec{\omega}$. In questo caso, avendo l'espressione esplicita della trasformazione (2.34), possiamo identificare $\vec{\omega}$. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{i} &= \dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \\ \frac{d}{dt}\mathbf{j} &= \dot{\phi}(-\cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Confrontando le (2.37) con le (2.34) si vede che le (2.37) possono essere scritte come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{i} &= \dot{\phi}\mathbf{j} = \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{j} &= -\dot{\phi}\mathbf{i} = \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.38)$$

In questo caso, quindi, il vettore $\vec{\omega}$ ha direzione costante e verso e modulo sono determinati dalla parte scalare $\dot{\phi}$, detta velocità angolare.

$\vec{\omega}$ come matrice antisimmetrica

Riprendiamo le trasformazioni fra vettori di S e di Σ espresse per mezzo delle matrici di rotazione. In particolare deriviamo rispetto al tempo (derivata operata da Σ) la relazione (2.17):

$$(\dot{\xi} - \dot{\xi}_O, \dot{\eta} - \dot{\eta}_O, \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_O)^T = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}^T(x, y, z)^T) = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) (x, y, z)^T + \mathbb{A}^T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T. \quad (2.39)$$

Il secondo termine al secondo membro di (2.39) rappresenta la velocità di P osservata da S , espressa nel riferimento di Σ attraverso l'applicazione di \mathbb{A}^T . Prendiamo in esame adesso il primo termine al secondo membro di (2.39). Poiché $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, è lecito scrivere:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) (x, y, z)^T = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}\mathbb{A}^T(x, y, z)^T. \quad (2.40)$$

Osserviamo adesso che

$$\mathbb{O} = \frac{d}{dt}\mathbb{I} = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} + \mathbb{A}^T \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A} \right), \quad (2.41)$$

dove \mathbb{O} rappresenta la matrice nulla. Abbiamo quindi

$$\mathbb{A}^T \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A} \right) = - \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}. \quad (2.42)$$

Ricordiamo che, date due matrici per le quali sia definito il prodotto righe per colonne, \mathbb{X}, \mathbb{Y} , vale $(\mathbb{X}^T \mathbb{Y})^T = \mathbb{Y}^T \mathbb{X}$. Quindi, nel nostro caso, abbiamo che

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} \right)^T = \mathbb{A}^T \frac{d}{dt} \mathbb{A}. \quad (2.43)$$

Confrontando (2.42) con (2.43) vediamo che

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} \right)^T = - \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}, \quad (2.44)$$

ovvero che la trasposta di $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ coincide con la matrice opposta (di segno opposto). Quindi, necessariamente $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ deve essere una matrice antisimmetrica, cioè della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

Tornando alla (2.40), osserviamo che la matrice \mathbb{A}^T applicata a $(x, y, z)^T$ riporta il vettore $(P - O)$ dalla rappresentazione in S a quella in Σ . Possiamo quindi scrivere che

$$\mathbb{A}^T(x, y, z)^T = (\xi_P - \xi_O, \eta_P - \eta_O, \zeta_P - \zeta_O)^T.$$

Se, inoltre, rappresentiamo la matrice antisimmetrica $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ nella forma seguente

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

si vede facilmente che

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} (\xi_P - \xi_O, \eta_P - \eta_O, \zeta_P - \zeta_O)^T = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

dove $\vec{\omega} = (\varpi_1 \mathbf{e}_1, \varpi_2 \mathbf{e}_2, \varpi_3 \mathbf{e}_3)^T$ è espresso nella rappresentazione di Σ . Una matrice 3×3 è definita da tre soli elementi e la sua applicazione ad un vettore

di \mathbb{R}^3 può essere rappresentata dal prodotto vettoriale con un opportuno vettore che ha per componenti i tre elementi della matrice. Il vettore $\vec{\omega}$ ed il prodotto vettoriale sono tuttavia invarianti solo per trasformazioni ortogonali, che conservano lo stesso ordine dei versori. Sono invarianti quindi solo se si applicano matrici ortogonali con determinante 1. Trasformazioni ortogonali con determinante -1 (trasformazioni da terna di mano destra a terna di mano sinistra, trasformazioni “attraverso lo specchio”) ne modificano l’ordine e, quindi, il segno.

Osserviamo che la (2.39) e, ovviamente la (2.40), forniscono una relazione che, attraverso le matrici di rotazione e la loro derivata, è esplicitamente rappresentata dall’osservatore Σ . Una forma più semplice si ottiene se se ne dà una formulazione intrinseca, evitando la rappresentazione di uno dei due osservatori. La (2.39) si scrive quindi come

$$\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_{O,\Sigma} + \vec{\omega} \wedge (P - O) + \mathbf{v}_S, \quad (2.47)$$

dove \mathbf{v}_Σ e $\mathbf{v}_{O,\Sigma}$ sono le velocità, rispettivamente, del punto P e del punto O osservate da Σ (**velocità assolute**) e \mathbf{v}_S è la velocità di P osservata da S (**velocità relativa**). La (2.47) è indubbiamente la formulazione più semplice per esprimere la legge di trasformazione della velocità di un punto fra due osservatori e l’introduzione del vettore $\vec{\omega}$ ha forti ragioni per il suo significato cinematico (già visto nel caso piano), resta però il fatto che per utilizzare la (2.47) occorre generalmente una sua rappresentazione rispetto ad un solo osservatore, che può essere Σ o S a seconda delle circostanze.

Accelerazione relativa

Consideriamo la (2.47) e deriviamola rispetto al tempo, dal punto di vista dell’osservatore Σ :

$$\mathbf{a}_\Sigma = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(P - O) + \frac{d}{dt}\mathbf{v}_S. \quad (2.48)$$

Prendiamo in esame gli ultimi due termini al secondo membro della (2.48). Se rappresentiamo $(P - O)$ e \mathbf{v}_S con le direzioni e le coordinate di S , avremo che $(P - O) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ e $\mathbf{v}_S = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$ e quindi

$$\frac{d}{dt}(P - O) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + \left(x \frac{d}{dt}\mathbf{i} + y \frac{d}{dt}\mathbf{j} + z \frac{d}{dt}\mathbf{k} \right) = \mathbf{v}_S + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad (2.49)$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_S = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + \left(\dot{x} \frac{d}{dt}\mathbf{i} + \dot{y} \frac{d}{dt}\mathbf{j} + \dot{z} \frac{d}{dt}\mathbf{k} \right) = \mathbf{a}_S + \vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_S. \quad (2.50)$$

La relazione fra l’accelerazione osservata da Σ (**accelerazione assoluta**) e quella osservata da S (**accelerazione relativa**) è dunque

$$\mathbf{a}_\Sigma = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_S + \mathbf{a}_S = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_S, \quad (2.51)$$

dove

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)$$

è la cosiddetta **accelerazione di trascinamento**, dovuta al solo moto di S rispetto a Σ . Questi termini sono presenti anche se il punto P è fermo rispetto ad S . Il termine $\mathbf{a}_{O,\Sigma}$ è presente se il moto di S rispetto a Σ presenta un'accelerazione di traslazione, il termine $\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$ rappresenta un'accelerazione di tipo centripeto verso il punto O ed è sempre presente se S cambia le proprie direzioni rispetto a Σ ed il termine $\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)$ è presente se il vettore $\vec{\omega}$ non è costante nel tempo.

$$\mathbf{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_S$$

è la cosiddetta **accelerazione di Coriolis**². Questo termine è nullo se $\vec{\omega} = 0$ e se $\vec{\omega}$ e \mathbf{v}_S sono paralleli. È ovviamente nullo se P è fermo rispetto all'osservatore S . Quando $\mathbf{a}_C \neq 0$, questa accelerazione (ortogonale rispetto alla velocità relativa \mathbf{v}_S) provoca, per l'osservatore Σ , un incurvamento della traiettoria di P .

\mathbf{a}_S è la cosiddetta **accelerazione relativa**, ovvero l'accelerazione di P osservata da S .

²Gaspard-Gustave de Coriolis, matematico, fisico e ingegnere meccanico francese (Parigi, 21 maggio 1792 - Parigi, 19 settembre 1843).