

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2011-2012

traccia della lezione del 23 marzo 2012

March 24, 2012

1 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. Se f è pari, allora F è pari.
2. Se f è dispari; allora F è dispari.
3. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
4. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.

Valgono anche le relazioni inverse se $f \in L^2(\mathbb{R})$ oppure se f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Precisamente:

5. Se F è pari, allora f è pari.
6. Se F è dispari; allora f è dispari.
7. Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.
8. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.
9. **Linearità** - Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\}, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

10. **Traslazione in frequenza** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

11. **Traslazione temporale** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

2 Calcolo della trasf. (antitrasf.) nel caso razionale

Il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier nel caso razionale puo' essere effettuato utilizzando la Teoria dei Residui (vista mercoledì scorso) e il seguente:

Lemma di Jordan - Sia g una funzione complessa razionale propria, ossia

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono polinomi con grado (N) < grado (D). Allora:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms} ds = 0$$

se:

i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s > 0$ e m è un numero reale positivo (vedi figura 1);

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s < 0$ e m è un numero reale negativo (vedi figura 2).

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove N e D sono polinomi con grado $D >$ grado N e $D(u) \neq 0$ per **ogni** u reale. Il procedimento è stato sviluppato dettagliatamente a lezione ed altri

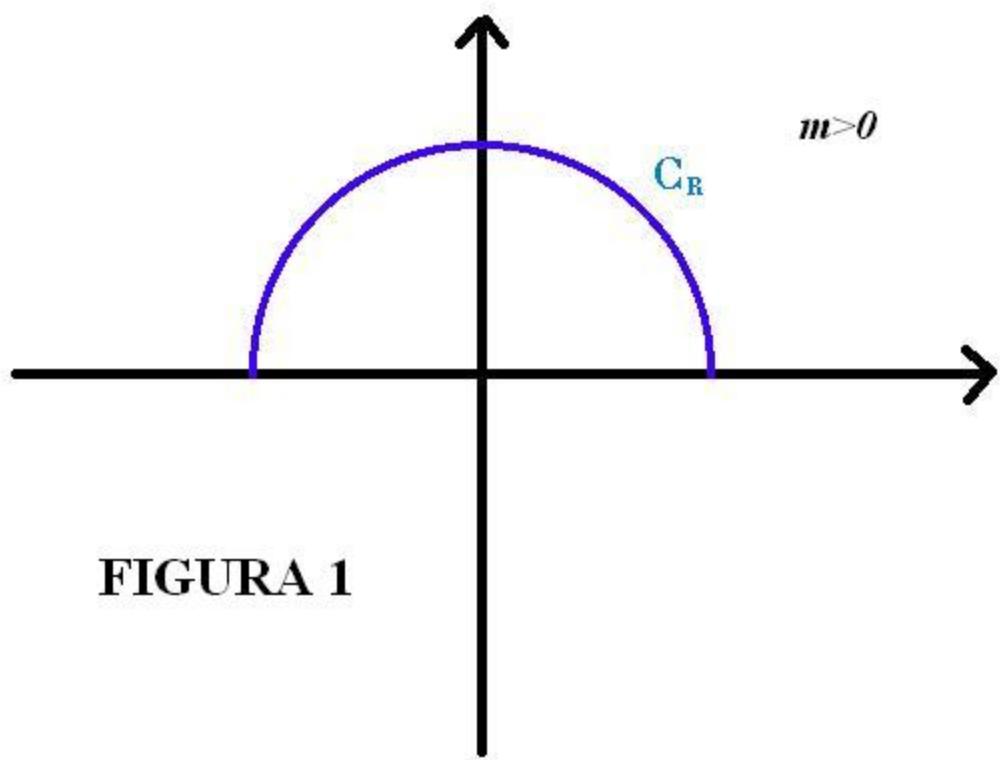


FIGURA 1

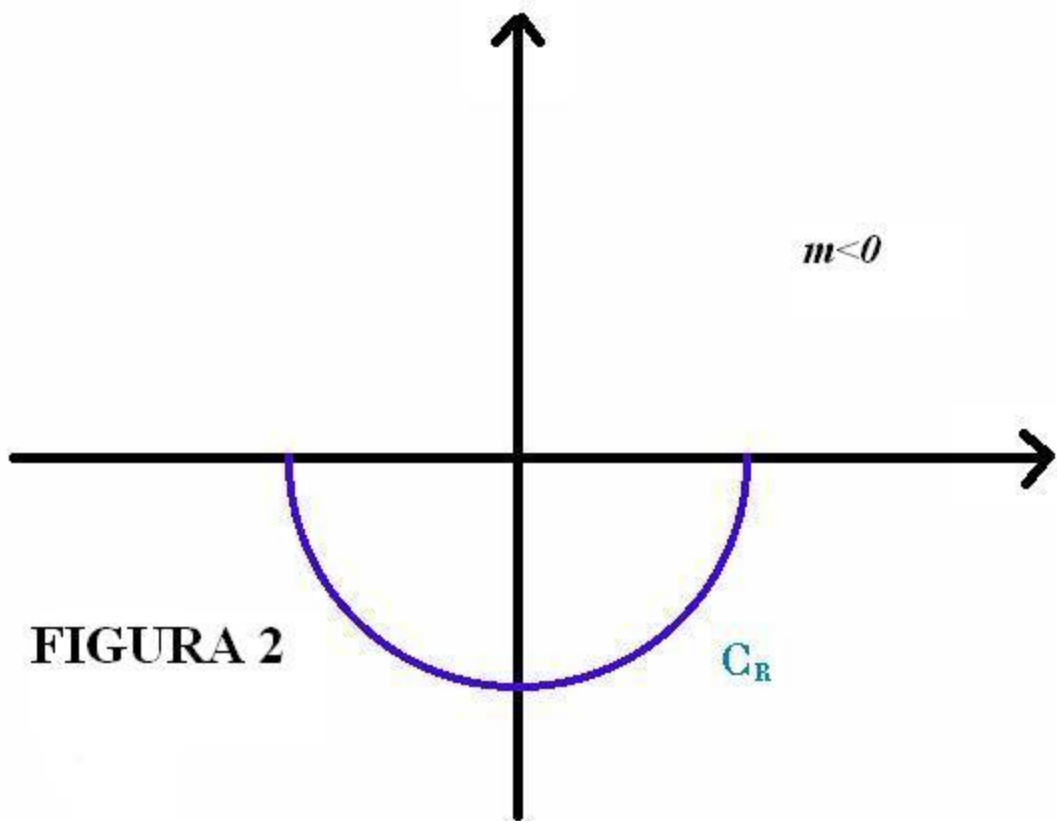


FIGURA 2

esercizi saranno visti nelle prossime lezioni. Qui ricordiamo soltanto i due risultati finali, il primo per la trasformata e il secondo per l'antitrasformata.

Teorema (trasformata) 1- Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} D(t) &\neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{gr } D - \text{gr } N &> 0 \end{aligned}$$

Allora, indicati con s_1, \dots, s_N gli zeri di D , si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) 2 - Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} i) & \text{gr } P < \text{gr } Q \\ ii) & Q(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora, indicati con s_1, \dots, s_N gli zeri di Q , l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

dove la scrittura $\text{Res}[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i .

Esercizio 1.

Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto in precedenza si ha per $t > 0$

$$f(t) = j \text{Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{2t} \text{ se } t < 0.$$

Esercizio 2.

Calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}e^{5jt}, \quad h_1(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1};$$
$$h_2(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1}e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezioni scorse)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \tag{1}$$

Per esercizio, si calcoli la trasformata di f utilizzando il Teorema 1 precedente, e si verifichi il risultato (1).

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t + 8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applicando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega - 4)}.$$