Capitolo 1

Angoli di Eulero

1.1

Consideriamo due terne di mano destra, (Ω, Σ), fissa, e (O, S), solidale al sistema rigido considerato, rispettivamente di versori $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, con origine comune $\Omega \equiv O$. È possibile passare dall'una all'altra mediante l'applicazione di tre successive matrici di rotazione. La prima rotazione (in senso antiorario, scelto come positivo) di un angolo ψ, detto **angolo di precessione**, è effettuata attorno all'asse individuato dal versore $\mathbf{e_3}$, che resta dunque invariato e porta la terna Σ a coincidere con una nuova terna Σ' di versori $(\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'} \equiv \mathbf{e_3})$, ottenuti dall'applicazione della prima matrice di rotazione $\mathbb{R}_\psi$ alla terna dei versori di Σ. Il nuovo versore $\mathbf{e_1'}$ individua adesso una retta, denominata **linea dei nodi**, e sarà di conseguenza indicato come $\mathbf{N}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1'} \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e_2'} \\ \mathbf{e_3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\mathbf{e_1} + \sin\psi\mathbf{e_2} \\ -\sin\psi\mathbf{e_1} + \cos\psi\mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

La seconda rotazione, di un angolo ϑ, detto **angolo di nutazione** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata avendo come asse la linea dei nodi e lascia quindi invariante il versore $\mathbf{N} \equiv \mathbf{e_1'}$. Questa rotazione porta la terna Σ' in una nuova terna Σ'', di versori $(\mathbf{e_1''}, \mathbf{e_2''}, \mathbf{e_3''})$ che si ottengono dall'applicazione della seconda matrice di rotazione $\mathbb{R}_\vartheta$ alla terna dei versori di Σ':

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1''} \\ \mathbf{e_2''} \\ \mathbf{e_3''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e_1'} \\ \mathbf{e_2'} \\ \mathbf{e_3'} \equiv \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\mathbf{e_1} + \sin\psi\mathbf{e_2} \\ -\sin\psi\cos\vartheta\mathbf{e_1} + \cos\psi\cos\vartheta\mathbf{e_2} + \sin\vartheta\mathbf{e_3} \\ \sin\psi\sin\vartheta\mathbf{e_1} - \cos\psi\sin\vartheta\mathbf{e_2} + \cos\vartheta\mathbf{e_3} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

La terza rotazione, di un angolo φ, detto **angolo di rotazione propria** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata attorno all'asse di versore $\mathbf{e_3''}$, che resta quindi invariato. Questa rotazione porta la terna Σ'' nella terna solidale S, di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e_3''})$ che si ottengono dall'applicazione della terza matrice di rotazione $\mathbb{R}_\varphi$ alla terna dei versori di Σ'':

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi\mathbf{e_1} + \sin\psi\mathbf{e_2} \\ -\sin\psi\cos\vartheta\mathbf{e_1} + \cos\psi\cos\vartheta\mathbf{e_2} + \sin\vartheta\mathbf{e_3} \\ \sin\psi\sin\vartheta\mathbf{e_1} - \cos\psi\sin\vartheta\mathbf{e_2} + \cos\vartheta\mathbf{e_3} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

la trasformazione che lega i versori della terna S a quelli della terna fissa Σ è quindi data dal prodotto delle tre rotazioni:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbb{R}_\varphi \mathbb{R}_\vartheta \mathbb{R}_\psi \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\mathbf{e_1} + (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\mathbf{e_2} + \sin\varphi \sin\vartheta \mathbf{e_3} \\ (-\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\mathbf{e_1} + (-\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\mathbf{e_2} + \cos\varphi \sin\vartheta \mathbf{e_3} \\ \sin\psi \sin\vartheta \mathbf{e_1} - \cos\psi \sin\vartheta \mathbf{e_2} + \cos\vartheta \mathbf{e_3} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

L'espressione inversa, ovvero la rappresentazione dei versori della terna fissa Σ per mezzo dei versori della terna solidale S, si ottiene dall'applicazione (in ordine inverso) delle trasposte delle matrici di rotazione:

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})^T = (\mathbb{R}_\varphi \mathbb{R}_\vartheta \mathbb{R}_\psi)^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T = {\mathbb{R}_\psi}^T {\mathbb{R}_\vartheta}^T {\mathbb{R}_\varphi}^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T \ . \tag{1.6}$$

1.2

Dai risultati ottenuti per la composizione dei moti rigidi è immediato ottenere l'epressione della veolocità di istantanea rotazione $\vec{\omega}$ di S rispetto a Σ come somma delle tre successive velocità di rotazione, corrispondenti alle tre trasformazioni che hanno portato Σ a coincidere con S; ovvero:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{e_3} + \dot{\vartheta}\mathbf{N} + \dot{\varphi}\mathbf{k} \ . \tag{1.7}$$

La (1.9) costituisce una rappresentazione di $\vec{\omega}$ in una base non ortogonale di versori, dove $\mathbf{e_3}$ appartiene a Σ e Σ', $\mathbf{k}$ appartiene a Σ'' e ad S e $\mathbf{N}$ appartiene a Σ' e Σ''.

È particolarmente importante costruire la rappresentazione di $\vec{\omega}$ nei versori della terna solidale S. Infatti, le equazioni di Eulero per la dinamica di un sistema rigido (II equazione cardinale)

$$\sigma(O)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \sigma(O)\vec{\omega} = M_A^{ext}(O) + M_R^{ext}(O) \tag{1.8}$$

sono immediatamente rappresentabili per componenti nel riferimento solidale S.

Ricordiamo il significato dei simboli: $\sigma(O)$ è la matrice (omografia) di inerzia, nota (e quindi rappresentabile) solo in S, O è un punto fisso (rispetto all'osservatore Σ o è il centro di massa del sistema rigido), $M_A^{ext}(O)$ e $M_R^{ext}(O)$ rappresentano, rispettivamente, il momento risultante rispetto ad O delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne.

Per rappresentare $\vec{\omega}$ nella terna di versori del riferimento solidale S, occorre dunque trovare la rappresentazione di $\mathbf{e_3}$ e di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Per ottenere l'espressione di $\mathbf{N}$ basta tornare da S a Σ'' con la matrice di rotazione ${\mathbb{R}_\varphi}^T$:

$$(\mathbf{N} \equiv \mathbf{e_1}'', \mathbf{e_2}'', \mathbf{e_3}'')^T = {\mathbb{R}_\varphi}^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T \ , \tag{1.9}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \ , \tag{1.10}$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{N} = \cos\varphi \mathbf{i} - \sin\varphi \mathbf{j} \ . \tag{1.11}$$

Per ottenere l'espressione di $\mathbf{e_3}$, basta tornare con la successiva rotazione inversa ${\mathbb{R}_\vartheta}^T$ alla terna di Σ', dato che $\mathbf{e_3} \equiv \mathbf{e_3}'$, cioè:

$$(\mathbf{e_1}' \equiv \mathbf{N}, \mathbf{e_2}', \mathbf{e_3}' \equiv \mathbf{e_3})^T = {\mathbb{R}_\vartheta}^T {\mathbb{R}_\varphi}^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T \ . \tag{1.12}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\mathbf{1}' \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e}_\mathbf{2}' \\ \mathbf{e}_\mathbf{3}' \equiv \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi\mathbf{i} - \sin\varphi\mathbf{j} \\ \sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

da cui si ottiene l'espressione di $\mathbf{e_3}$ nella terna di versori solidali $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$\mathbf{e_3} = \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k} \ . \tag{1.14}$$

Sostituendo in (1.9) le espressioni trovate in (1.11) e (1.14), otteniamo la rappresentazione della velocità di istantanea rotazione della terna solidale S, rispetto a Σ, espressa per mezzo degli angoli di Eulero (coordinate lagrangiane) e delle loro derivate, nelle componenti del riferimento solidale, riferimento in cui possiamo rappresentare le equazioni di Eulero (1.8):

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi)\mathbf{i} + (\dot{\psi}\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi)\mathbf{j} + (\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi})\mathbf{k} \ . \tag{1.15}$$