C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
12/02/2019

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2x + y}{3 + 3y^2 - x} \; .$$

SOLUZIONE:

$$x^2 + xy - 3y - y^3 = C \; .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \, , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ & \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{-3x} \begin{pmatrix} 3 + 4x \\ 2 + 4x \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi \le x < 0\,, \\ x\,, & 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo 2π, i.e.

$$f(x+2\pi) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Sia Z la v.a. normale standard, $Z \sim N(0,1)$. Si chiede:

a) Calcolare $\mathbb{P}(Z \le -2)$, $\mathbb{P}(-1 \le Z \le 0.5)$, $\mathbb{P}(Z \ge -0.75)\,;$

b) determinare il valore di $a > 0$, t.c. $\mathbb{P}(|Z| \le a) = 0.82\,;$

c) determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che $\mathbb{P}(Z < -b) = 0.61\,.$

SOLUZIONE:

a) $\mathbb{P}(Z \le -2) = 1 - \mathbb{P}(Z \le 2) = 0.0228\,,\quad \mathbb{P}(-1 \le Z \le 0.5) = 0.5328\,,\quad \mathbb{P}(Z \ge -0.75) = \mathbb{P}(-Z \le 0.75) = \mathbb{P}(Z \le 0.75) = 0.7734\,;$

b) poiché Z è pari, $\mathbb{P}(|Z| \le a) = 2\mathbb{P}(Z \le a) - 1$, quindi $0.82 = 2\mathbb{P}(Z \le a) - 1$ e $2\,\mathbb{P}(Z \le a) = 0.91 \Longrightarrow a = 1.34\,;$

c) $\mathbb{P}(Z \le -b) = 0.61 \Longrightarrow b = -0.28\,.$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Sia X una v.a. tale che

$$f_X(x) = \begin{cases} k\cos x\,, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,, \\ \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Si chiede:

a) calcolare il valore di k, in modo che la $f_X(x)$ sia una densità di probabilità definita correttamente;

b) calcolare $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{\pi}{4}\right)$;

c) calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$.

SOLUZIONE:

a) per calcolare il valore di k poniamo $1 = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = k\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = k$, quindi $k = 1$.

b) $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{x}\,, & 0 < y \leq x \leq 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali e valutare l'eventuale indipendenza delle v.a. X e Y;

c) calcolare $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[XY], \mathrm{Cov}[X,Y]\,.$

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dx dy = k\,;$$

quindi $k = 1\,.$

b) per le densità marginali abbiamo

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1\,,\ 0 \leq x \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,;$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\log y\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,;$$

come si verifica facilmente $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, quindi le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{6}$, $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{24}\,.$