C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
13/02/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(x^2-1)y' = -2xy\,.$$

SOLUZIONE:

$$x^2y - y = C\ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,,\quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{-x}\begin{pmatrix}1+4x\\1\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione
$$f(x) = x + x^2\,,\ x \in [-\pi, \pi]\,.$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2π.

SOLUZIONE:
$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Consideriamo tre eventi indipendenti A, B e C, aventi rispettivamente probabilità
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}\,, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\,, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}\,.$$
Si calcoli la probabilità dell'evento
$$\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{C})\right)\ ,\ \text{dove } \bar{C} \text{ rappresenta il complementare di } C\,.$$

SOLUZIONE:

Per l'indipendenza degli eventi avremo
$$\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{C})\right) = \mathbb{P}\left((A \cap B)\right) + \mathbb{P}\left((A \cap \bar{C})\right) - \mathbb{P}\left((A \cap B) \cap (A \cap \bar{C})\right)$$
$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{C}) - \mathbb{P}(A \cap B \cap \bar{C})) = \tfrac{5}{24} \simeq 0.21.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un evento non precisato si manifesta in media 4 volte all' anno. Supponendo che il fenomeno sia modellizzabile come un processo di Poisson, si chiede:

a) calcolare la probabilità che tali eventi si manifestino tre volte in metà mese;

b) calcolare la probabilità che nessun evento si manifesti in un mese.

SOLUZIONE:

Sia X la v.a. che rappresenta il numero di eventi. Se X segue la distribuzione di Poisson, la probabilità associata al numero di eventi k è

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \,.$$

Con la frequenza $\nu = 4$ e l'unità di misura temporale uguale a un anno, avremo $\lambda = 4 \cdot \frac{1}{24} \simeq 0.17$ nell'intervallo di tempo di metà mese. Quindi

a) $\mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{(0.17)^3}{3!} e^{-0.17} \simeq 6.9 \cdot 10^{-4}\,.$

b) In questo caso $\lambda = 4 \cdot \frac{1}{12} \simeq 0.33\,.$ Quindi

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-0.33} \simeq 0.72\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\sqrt{xy}, & 0 \le x \le y \le 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare e le densità marginali.

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1 \int_0^y \sqrt{xy}\, dxdy = \frac{2}{9}k \quad \text{e quindi} \quad k = \frac{9}{2}\,;$$

b) per le densità marginali

$$f_X(x) = \frac{9}{2}\int_x^1 \sqrt{xy}\, dy = 3(\sqrt{x} - x^2), \quad f_Y(y) = \frac{9}{2}\int_0^y \sqrt{xy}\, dx = 3y^2\,.$$