C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
15/01/2019

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$x(y^3 - 2x)y' + y(2x + y^3) = 0 \ .$$

SOLUZIONE:

$$x^2 + xy^3 = Cy^2 \ , \quad x \neq 0.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \, , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^x \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - \frac{x}{2}\,,\ x \in [0,2]\,,$$

la si prolunghi pari nell'intervallo $[-2,0]$ e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo 4, i.e.

$$f(x+4) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}\,.$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Una v.a. X segue una legge di Poisson, $X \sim P(\lambda)$, la cui densità di probabilità è data da

$$f_X(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,, k = 0, 1, \ldots n, \ldots$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di λ per cui $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3)$;

b) calcolare esplicitamente la media e la varianza, illustrandone il procedimento.

SOLUZIONE:

a) Il valore cercato per λ si ottiene uguagliando

$$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}\,,$$

che ammette soluzione per $\lambda = 3$.

b) per il calcolo della media abbiamo

$$\mathbb{E}[X] = e^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k3^k}{k!} = 3e^{-3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{(k-1)!} = 3\,.$$

Per il calcolo della varianza, ricordando che $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$, abbiamo

$$\mathbb{E}[X^2] = e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{k!} = 3e^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 3^{k-1}}{(k-1)!} = 3e^{-3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)3^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} \right\}$$

$$= 3e^{-3} \left\{ 3e^3 + e^3 \right\} = 12$$

e quindi $\mathrm{Var}[X] = 12 - 9 = 3$.

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Una v.a. X è distribuita come una normale di media μ e varianza σ^2, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Sapendo che $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0.02$ e che $\mathbb{P}(X \geq 20) = 0.06$, si calcolino media e varianza.

SOLUZIONE:

Standardizzando la v.a. X, la prima informazione si traduce in

$$0.02 = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

e quindi

$$z_{0.02} = -\frac{\mu}{\sigma}$$

e, dalle tavole, ricordando che $z_{0.02}0 = -z_{0.98}$

$$\mu = 2.05\,\sigma\,.$$

Dalla seconda abbiamo

$$0.06 = \mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right)\,.$$

e quindi

$$z_{0.94} = \frac{20+\mu}{\sigma}$$

e, dalle tavole

$$\mu + 1.56\,\sigma = 20\,.$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni lineari otteniamo

$$\sigma \simeq 5.54\,, \quad \mu \simeq 11.38\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ke^{(x+y)} \,, & x,y \in [0,1]\times[0,1]\,, \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali e valutare l'eventuale indipendenza delle v.a. X e Y;

c) calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1\int_0^1 e^{(x+y)}dxdy = k\int_0^1 e^x dx \cdot \int_0^1 e^y dy = k(e-1)^2\,;$$

quindi $k = (e-1)^{-2}$.

b) per le densità marginali abbiamo

$$f_X(x) = (e-1)^{-2}\int_0^1 e^{(x+y)}dy = \frac{e^x}{e-1}\,,\ 0 \le x \le 1\,,\ \text{e } 0 \text{ altrove}\,;$$

$$f_Y(y) = (e-1)^{-2}\int_0^1 e^{(x+y)}dx = \frac{e^y}{e-1}\,,\ 0 \le y \le 1\,,\ \text{e } 0 \text{ altrove}\,;$$

come si verifica facilmente $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, quindi le due v.a. sono indipendenti.

c) Per il calcolo di $\mathbb{P}(X > Y)$ abbiamo

$$\mathbb{P}(X > Y) = (e-1)^{-2}\int_0^1 e^x dx \int_0^x e^y dy = (e-1)^{-2}\int_0^1 (e^{2x} - e^x)dx = \frac{1}{2}\,.$$