C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
16/01/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$xy' - y^2\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 0\,, \quad y \neq 0\,.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{x}{C - x}\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + \sin\frac{x}{2}\,,\ x \in [-\pi, \pi]\,.$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2π.

SOLUZIONE:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}\sin nx\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Consideriamo due urne, U_1 e U_2. U_1 contiene 6 palline rosse e 4 bianche. U_2 contiene 8 palline bianche e 2 rosse. Si sceglie un urna e si estraggono 4 palline. Sapendo che la probabilità di scegliere l'urna U_1 è uguale a $\frac{2}{3}$, si chiede la probabilità di estrarre 3 palline bianche ed una rossa (evento E.)

SOLUZIONE:

$\mathbb{P}(U_1) = \frac{2}{3}\,;\quad \mathbb{P}(U_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,;$

La probabilità di estrazione delle palline segue la legge ipergeometrica:

$$\mathbb{P}(E|U_1) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{4}} \simeq 0.11 \quad , \quad \mathbb{P}(E|U_2) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{1}}{\binom{10}{4}} \simeq 0.53$$

La soluzione richiesta si ottiene applicando il teorema delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(E|U_1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(E|U_2) \simeq 0.26\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un gruppo di continuità a protezione di un server si mette in funzione in caso di blackout. Il tempo medio che intercorre fra due guasti del gruppo è di 100 ore.

a) si chiede la probabilità che il gruppo si guasti durante un blackout di 10 ore ;

b) se un secondo gruppo di continuità, avente le stesse caratteristiche del primo, può agire in parallelo per ulteriore sicurezza, si calcoli la probabilità che entrambi i gruppi si guastino durante un blakout di 10 ore.

SOLUZIONE:

a) Si applica la distribuzione di Poisson di parametro $\frac{1}{100}$. Se indichiamo con X_{10} la v.a. che rappresenta il numero di guasti in 10 ore, avremo

$$\mathbb{P}((X_{10} > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_{10} = 0) = 1 - e^{-\frac{10}{100}} = 1 - e^{-0.1} \simeq 0.095\,.$$

b) Il secondo generatore in parallelo, con le stesse caratteristiche del primo, ha la stessa probabilità di guastarsi. Indicando con la v.a. Y il numero di guasti del secondo generatore, per l'indipendenza delle due v.a., abbiamo

$$\mathbb{P}((X_{10} > 0, Y_{10} > 0) == \left(1 - e^{-0.1}\right) \simeq 0.009\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x, y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{y}, & 0 < x < y < 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e dire se le due variabili sono indipendenti;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y > 2X)$.

SOLUZIONE:

Per il calcolo di k, si pone

$$k \int_0^1 dy \int_0^y \frac{x}{y}\, dx = 1\,,$$

ottenendo

a) $k = 1$;

b) $f_X(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} = \log \frac{1}{x}$, $\quad f_Y(y) = \int_0^y dxy = 1$; le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{P}(Y > 2X) = \mathbb{P}(X < \frac{Y}{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{y} \int_0^{\frac{y}{2}} dx = \frac{1}{2}$.