C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
17/09/2019

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(x^2-1)y' + xy - 3xy^2 = 0\ .$$

SOLUZIONE:

$$y^{-1} = 3 + C\sqrt{|x^2-1|}\ .$$

Si tratta di un'equazione del tipo di Bernoulli.

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - e^{x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0,1] \\ \\ 1\,, & x \in (1,2], \end{cases}$$

la si prolunghi pari sull'intervallo $[-2,0)$, se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo 4, i.e.

$$f(x+4) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

La scadenza di un prodotto agro-alimentare è indicata in 10 giorni dopo la fabbricazione. Sia X la v.a. che indica la durata limite di conservazione di un tale prodotto. X è misurata in giorni e segue una legge esponenziale, di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}\,, & x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrove}\ . \end{cases}$$

Si chiede:

a) Determinare λ in modo che il valore atteso $\mathbb{E}[X] = 10$;

b) calcolare la probabilità che un prodotto sia già degradato al decimo giorni;

c) dopo quanti giorni va consumato il prodotto, in modo da avere solo il 5% di probabilità che il prodotto sia degradato?

SOLUZIONE:

a) $10 = \mathbb{E}[X] = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$; quindi $\lambda = \frac{1}{10}$;

b) $\mathbb{P}\,(X = 10) = \frac{1}{10}\int_0^{10} e^{-\frac{x}{10}}dx = 1 - e^{-1}$;

Ma $\mathbb{P}(X \geq 12) = \frac{1}{10}\int_{12}^{\infty} e^{-\frac{x}{10}} dx = e^{-\frac{6}{5}}$; e quindi

$$\mathbb{P}\left(X \geq 12 | X \geq 10\right) = e^{-\frac{1}{5}}\,.$$

c) Vogliamo trovare il valore x assumibile dalla v.a. X, t.c. $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.05$. La funzione di ripartizione associata alla distribuzione esponenziale è

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}} = 0.05, \quad \text{quindi} \quad x = -10 \times \log(0.95) = 0.5129\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un macchinario produce dei pezzi, la cui lunghezza può essere considerata come una v.a. normale, $X \sim N(54, (0.2)^2)$, essendo il centimetro l'unità di lunghezza. Un pezzo è considerato difettoso se la sua lunghezza è inferiore a 53.6 cm o superiore a 54.3 cm. Si chiede:

a) calcolare la probabilità che un pezzo sia difettoso;

b) Per verificare che il macchinario non sia mal regolato, si fissano dei limiti di allarme:

$$C_1 = 54 - h \text{ e } C_2 = 54 + h \quad \text{definiti in modo tale che} \quad \mathbb{P}(C_1 \leq X \leq C_2) = 0.95\,.$$

Calcolare C_1 e C_2.

SOLUZIONE:

a) Dobbiamo calcolare la probabilità che X assuma valori al di fuori dell'intervallo $[53.6, 54.3]$, i.e.

$$1 - \mathbb{P}(53.6 \leq X \leq 54.3) = 1 - [\mathbb{P}(X \leq 54.3) - \mathbb{P}(X \leq 53.6)]\ ;$$

Passando alla v.a. standard Z, avremo

$$1 - \mathbb{P}(53.6 \leq X \leq 54.3) = 1 - \Phi(1.5) + \Phi(-2) = 2 - \Phi(1.5) - \Phi(2) = 0.0896\,.$$

b) $\mathbb{P}(C_1 \leq X \leq C_2) = \mathbb{P}(X \leq 54 + h) - \mathbb{P}(X \leq 54 - h)$. Passando alla normale standard avremo

$$0.95 = \mathbb{P}(C_1 \leq X \leq C_2) = \Phi\left(\frac{h}{0.2}\right) - \Phi\left(-\frac{h}{0.2}\right) = 2\Phi\left(\frac{h}{0.2}\right) - 1.$$

Quindi $\Phi\left(\frac{h}{0.2}\right) = 0.975$ e $\frac{h}{0.2} = z_{0.975} = 1.96$ e quindi $h = 0.392\,cm, C_1 = 53.608\,cm, C_2 = 54.392\,cm$.

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia X una v.a. avente la seguente funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+x}\,, & x \geq 0\,, \\ \\ 0 \quad \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Si chiede:

a) determinare la densità della X;

b) verificare che questa distribuzione non ammette valori finiti per $\mathbb{E}\,(X)$ e $\mathrm{Var}[X]$;

c) calcolare $\mathbb{P}(X^2 \geq 2X)$.

SOLUZIONE:

a) $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}\,, \quad x \geq 0$

b) $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}dx = 1 + \log(1+x)|_0^\infty = \infty$; anche la varianza risulta non finita, di conseguenza.

c) $\mathbb{P}\,(X^2 \geq 2X) = \mathbb{P}(X(X-2) \geq 0) = \mathbb{P}(X \geq 2)$. Quindi occorre calcolare

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \int_2^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = -\left.\frac{1}{1+x}\right|_2^\infty = \frac{1}{3}\,.$$