

**C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici**

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA

18/04/2019

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 5):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy .$$

SOLUZIONE:

$$x^2 + y^2 + Cy = 0 .$$

Il risultato si ottiene sia con il fattore integrante $q(y) = y^{-2}$ che con la sostituzione $z = \frac{y}{x}$.

ESERCIZIO 2 (punti 5):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = -3e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (punti 5):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - 2x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo 2, i.e.

$$f(x+2) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2} \cos n\pi x.$$

ESERCIZIO 4 (punti 5):

Al centralino di un ufficio arrivano in media due chiamate al minuto. Modellizzando il fenomeno come un processo di Poisson, si chiede:

- a) Calcolare la probabilità che in un minuto non arrivi nessuna chiamata;
- b) calcolare la probabilità che arrivino due chiamate in due minuti;
- c) determinare la probabilità che arrivino almeno tre chiamate in due minuti.

SOLUZIONE:

- a) $\mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-2} \simeq 0.135$;
- b) $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{(2 \times 2)^2}{2!} e^{-(2 \times 2)} \simeq 0.146$;
- c) $\mathbb{P}(X_2 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_2 < 3) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 2) - \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_2 = 0) \simeq 0.764$.

ESERCIZIO 5 (punti 5):

Un giocatore di basket tira a canestro da una posizione fissata e la probabilità di fare centro è il 35%. Considerando ogni singolo tentativo come una prova bernoulliana, si chiede:

- a) Calcolare la probabilità di realizzare 3 centri su 10 tiri;
- b) calcolare la probabilità di dover tirare 10 volte per ottenere un centro;
- c) determinare la probabilità che il giocatore realizzi almeno tre centri in 10 prove.

SOLUZIONE:

a) Distribuzione binomiale, $\mathbb{P}(X_B = 3) = \binom{10}{3}(0.35)^3(0.65)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}(0.35)^3(0.65)^7 \simeq 0.253$;

b) Distribuzione geometrica modificata, $\mathbb{P}(X_G > 10) = (0.65)^9(0.35) \simeq 0.007$;

c) Distribuzione binomiale, $\mathbb{P}(X_B \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_B = 2) - \mathbb{P}(X_B = 1) - \mathbb{P}(X_B = 0) \simeq 0.74$.

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia X una v.a. tale che

$$f_X(x) = \begin{cases} k(4 - x^2), & x \in [-2, 2], \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si chiede:

a) calcolare il valore di k , in modo che la $f_X(x)$ sia una densità di probabilità definita correttamente;

b) calcolare $\mathbb{P}(X \leq 4)$, $\mathbb{P}(X \geq -3)$, $\mathbb{P}(X \leq -6)$;

c) calcolare la funzione di ripartizione $F_X(x)$ e la probabilità $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$.

SOLUZIONE:

a) per calcolare il valore di k poniamo $1 = k \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = k \frac{32}{3}$, quindi $k = \frac{3}{32}$.

b) $\mathbb{P}(X \leq 4) = 1$, $\mathbb{P}(X \geq -3) = 1$, $\mathbb{P}(X \leq -6) = 0$;

c) Poiché $\frac{3}{32} \int_{-2}^x (4 - t^2) dt = \frac{3}{32} \left(4x - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3} \right)$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{3}{32} \left(4x - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3} \right), & x \in [-2, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = \frac{27}{32} - \frac{1}{2} = \frac{11}{32} \simeq 0.34.$$