C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
18/09/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$2xyy' + (x - y^2) = 0 \; .$$

SOLUZIONE:

$$\frac{y^2}{x} + \log|x| = C \; , \quad x \neq 0.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \, , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{-x} \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x - 2\sin x \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| \sin x \, , \; x \in [-\pi, \pi] \, .$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \, , \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{(2k+1)^2 (2k-1)^2} \, .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Consideriamo due urne, A e B, indistinguibii fra loro. L'urna A contiene 1 pallina nera (N), 2 palline rosse (R) e tre palline verdi (V); l'urna B contiene 3 palline nere, 1 rossa e due verdi. Si chiede:

a) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia una nera;

b) qual è la probabilità che se si estrae una pallina rossa, questa provenga da A?

SOLUZIONE:

a) Le urne A e B sono indistinguibili e la scelta è equiprobabile $\left(\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\right)$. Usando il teorema delle probabilità totali abbiamo

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(N|B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \simeq 0.33 \, ;$$

b) si tratta di una semplice applicazione della formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(A|R) = \frac{\mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R)} \, .$$

Occorre quindi calcolare $\mathbb{P}(R)$, sempre con la formula delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \simeq 0.25 \, .$$

Quindi

$$\mathbb{P}(A|R) = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \simeq 0.66\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un'azienda produce batterie e la statistica dice che il 3% dei prodotti è difettoso, si chiede:

a) la probabilità che in un lotto di 50 pezzi, nessuno sia difettoso;

b) qual è la probabilità che in un lotto di 100 batterie ci siano più di 3 pezzi difettosi .

SOLUZIONE:

a) Possiamo considerare il numero di pezzi difettosi come una variabile aleatoria X che segue una legge binomiale, $X \sim \mathcal{B}\left(50, \frac{3}{100}\right)$. Quindi

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{50}{0} p^0(1-p)^{50} = 0.97^{50} \simeq 0.21\,;$$

b) $\mathbb{P}(X>3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=3)\,.$

Occorre quindi calcolare

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{100}{0} p^0(1-p)^{100} = 0.97^{100} \simeq 0.047\,;$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \binom{100}{1} p^1(1-p)^{99} = 100 \cdot 0.03 \cdot 0.97^{99} \simeq 0.147\,;$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{100}{2} p^2(1-p)^{98} = \frac{100!}{98!2!} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{98} = 4950 \cdot 0.0009 \cdot 0.055 \simeq 0.245\,;$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{100}{3} p^3(1-p)^{97} = \frac{100!}{97!3!} \cdot 0.03^3 \cdot 0.97^{97} = 161700 \cdot 0.000027 \cdot 0.052 \simeq 0.227\,;$$

Quindi

$$\mathbb{P}(X>3) = 1 - 0.047 - 0.147 - 0.245 - 0.227 = 0.334\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{x}\,, & 0 \leq y \leq x \leq 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali;

c) valutare l'eventuale indipendenza delle v.a. X e Y e motivare il risultato ottenuto .

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dx dy = k \int_0^1 dx = k\,;$$

b) per le densità marginali

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1\,,\ 0 \leq x \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,;$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\log y\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,.$$

c) come si verifica facilmente $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, quindi le due v.a. non sono indipendenti.