C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
26/06/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y' + \frac{y}{x} + x^2y^2 = 0 \qquad y(1) = 1.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{2}{x^3 + x} \,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & -2 \leq x < -1 \\ 0\,, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1\,, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x+4) = f(x)\,.$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\,.$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Estraggo 2 palline. Quanto vale la probabilità di estrarre due palline pari?

SOLUZIONE:

Indichiamo con P_1 l'evento "la prima pallina estratta è pari" e con P_2 l'evento "la seconda pallina estratta è pari". Quello che vogliamo calcolare è $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$. Dalla definizione di probabilità condizionata sappiamo che

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1|P_2)\mathbb{P}(P_1)\,.$$

con

$$\mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(P_2|P_1) = \frac{9}{19}\,,$$

quindi

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{9}{38}\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un artigiano accetta pagamenti a 30 giorni per il suo lavoro. Le fatture vengono pagate secondo una legge normale di media 30 giorni e deviazione standard di 4 giorni. Si chiede quanti giorni occorrono perché venga pagato l'80% delle fatture.

SOLUZIONE:

La v.a. $X \sim N(30, 16)$ indica i numero dei giorni e si scrive in termini della standardizzata come $X = 4Z + 30$. La probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-30}{4}\right) = 0.8$$

Quindi

$$\Phi\left(\frac{x-30}{4}\right) = 0.8$$

Dalle tavole si ottiene

$$\frac{x-30}{4} = 0.85 \quad \Rightarrow \quad x \simeq 33 \text{ giorni}\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx^3, & y \geq 0\,; 0 \leq y \leq x \leq 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali.

c) calcolare $\mathbb{P}(X^3 > Y)$.

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1 x^3 \int_0^x dydx = \int_0^x x^4 dx = \frac{1}{5} \quad \text{e quindi} \quad k = 5\,;$$

b) per le densità marginali

$$f_X(x) = 5\int_0^x x^3 dy = 5x^4\,,\ 0 \leq x \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,;$$

$$f_Y(y) = 5\int_y^1 x^3 dx = \frac{5}{4}(1 - y^4)\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,.$$

c) $\mathbb{P}(X^3 > Y) = \mathbb{P}(Y < X^3) = 5\int_0^1 x^3 \int_0^{x^3} dy = 5\int_0^1 x^6 dx = \frac{5}{7}$.