

C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA

29/01/2019

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 5):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0 .$$

SOLUZIONE:

$$3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C , \quad x \neq 0 .$$

ESERCIZIO 2 (punti 5):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{4} \left[e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right] .$$

ESERCIZIO 3 (punti 5):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo π , i.e.

$$f(x + \pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2nx.$$

ESERCIZIO 4 (punti 5):

Una macchina produce delle rondelle metalliche, che devono rispettare degli standard. Una rondella è accettata se il suo diametro esterno è compreso fra 21.9 mm e 22.1 mm. Supponendo che il diametro sia modellizzabile come una v.a. $X \sim N(22, (0.05)^2)$, si chiede la probabilità che una rondella presa a caso debba essere rifiutata.

SOLUZIONE:

Dobbiamo calcolare la probabilità che il diametro della rondella non rientri nell'intervallo $[21.9, 22.1]$, ovvero

$$1 - \mathbb{P}(21.9 \leq X \leq 22.1).$$

Passando alla v.a. normale standard $Z = \frac{X-22}{0.05}$, la precedente espressione si riscrive

$$1 - \mathbb{P}\left(\frac{21.9 - 22}{0.05} \leq Z \leq \frac{22.1 - 22}{0.05}\right)$$

e

$$\mathbb{P}\left(\frac{21.9 - 22}{0.05} \leq Z \leq \frac{22.1 - 22}{0.05}\right) = \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 2) = 2\mathbb{P}(Z \leq 2) - 1 = 0.9544.$$

Quindi la probabilità cercata è $1 - 0.9544 = 0.0456$.

ESERCIZIO 5 (punti 5):

Sia X una v.a. tale che

$$\mathbb{E}[X + 3] = 4, \quad \mathbb{E}[(X + 3)^2] = 19.$$

Si chiede di calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$ e la varianza $\text{Var}[X]$.

SOLUZIONE:

Per la linearità del valore atteso abbiamo che $\mathbb{E}[X + 3] = \mathbb{E}[X] + 3$. Quindi $\mathbb{E}[X] = 1$.

Inoltre, poiché la varianza è invariante per traslazione

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X + 3] = \mathbb{E}[(X + 3)^2] - \mathbb{E}^2[(X + 3)] = 3.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x, y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & x, y \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

- a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x, y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;
- b) calcolare le densità marginali e valutare l'eventuale indipendenza delle v.a. X e Y ;
- c) calcolare $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2} | Y \geq \frac{1}{2})$.

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k , si pone

$$1 = k \int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy = k \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{6};$$

quindi $k = 6$.

b) per le densità marginali abbiamo

$$f_X(x) = 6 \int_0^1 xy^2 dy = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ e } 0 \text{ altrove};$$

$$f_Y(y) = 6 \int_0^1 xy^2 dx = 3y^2, \quad 0 \leq y \leq 1, \text{ e } 0 \text{ altrove};$$

come si verifica facilmente $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, quindi le due v.a. sono indipendenti.

c) Per il calcolo di $\mathbb{P}(X > Y)$ abbiamo, dall'indipendenza della due v.a.

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2} \mid Y \geq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_X(x) dx = \frac{3}{4}.$$