C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
29/03/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Calcolare la soluzione esplicita del seguente problema ai valori iniziali:

$$x(x-1)y' = y(y+1)\,, \quad y(2) = 2\,.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{4(x-1)}{4-x}\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}\,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| + x^2\,,\ x \in [-\pi, \pi]\,.$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2π.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{2\pi^2 + 3\pi}{6} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Un'urna contiene 40 palline, di cui 12 bianche, 11 rosse e 17 verdi. Si estraggono contemporaneamente 6 palline.
Si calcoli la probabilità che escano 3 palline bianche, 2 rosse e 1 verde.

SOLUZIONE:

Il numero delle estrazioni posssibili è $\binom{40}{6}$. Indicando con A l'evento di cui si richiede la probabilità, avremo

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{17}{1}\binom{12}{3}\binom{11}{2}}{\binom{40}{6}} \simeq 0.54$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

In una rete di telecomunicazioni si verificano interruzioni di linea in media una volta al giorno. Supponendo che il fenomeno sia modellizzabile come un processo di Poisson, si chiede:

a) calcolare la probabilità che nessuna interruzione si verifichi in 5 giorni;

b) calcolare la probabilità che si verifichino esattamente 2 interruzioni in tre giorni;

c) calcolare la probabilità che si verifichino almeno 2 interruzioni in 5 giorni.

SOLUZIONE:

Sia X la v.a. che rappresenta il numero di eventi. Se X segue la distribuzione di Poisson, la probabilità associata al numero di eventi k è

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \,.$$

Con la frequenza giornaliera $\nu = 1$ e l'unità di misura temporale uguale a un giorno, avremo

a) $\mathbb{P}(X_5 = 0) = e^{-5} \simeq 0.0067\,.$

b) $\mathbb{P}(X_3 = 2) = e^{-3}\,\frac{3^2}{2!} \simeq 0.22\,;$

c) $\mathbb{P}(X_5 \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X_5 = 0) - \mathbb{P}(X_5 = 1) = 1 - e^{-5}(1 + 5) \simeq 0.96\,.$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy^2, \quad y \geq 0\,; 0 \leq y^2 \leq x \leq 1\,, \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali.

c) calcolare $\mathbb{P}(X > 0.5)$.

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} xy^2\, dy\right) dx = \frac{2}{21}k \quad \text{e quindi} \quad k = \frac{21}{2}\,;$$

b) per le densità marginali

$$f_X(x) = \frac{21}{2}\int_0^{\sqrt{x}} xy^2\, dy = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{21}{2}\int_{y^2}^1 xy^2\, dx = \frac{21}{4}y^2(1-y^4)\,.$$

c) $\mathbb{P}(X > 0.5) = \frac{7}{2}\int_{0.5}^1 x^{\frac{5}{2}}\, dx = (0.5)^{\frac{7}{2}} \simeq 0.91\,.$