C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
30/01/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{y^3 - x^2 y}{x^3}\,, \quad x \neq 0\,.$$

SOLUZIONE:

$$y^2 = \frac{2x^2}{1 + Cx^4}\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4e^{3x} - 3e^{2x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \cos\left(\pi \frac{x}{2}\right) \ , \ x \in [-1, 1] \, .$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{32}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2} \sin n\pi x \ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si distribuiscono 40 carte fra 4 giocatori (10 a testa). Si calcoli la probabilità che un giocatore abbia servito in una mano:

a) almeno un fante (evento F_1);

b) due regine (evento R_2).

SOLUZIONE:

a) Le combinazioni possibili sono $\binom{40}{10}$; se F_k è l'evento "il giocatore ha k fanti", la probabilità di avere un fante è $1 - \mathbb{P}(F_0)$, dove

$$\mathbb{P}(F_0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{36}{10}}{\binom{40}{10}} \simeq 0.30 \, , \text{ e quindi } \quad \mathbb{P}(F_1) = 1 - \mathbb{P}(F_0) \simeq 0.70 \, .$$

b) La probabilità di ottenere due regine in una mano segue la legge ipergeometrica:

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{8}}{\binom{40}{10}} \simeq 0.21 \, .$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un'azienda produce dei regoli di legno, la cui lunghezza si comporta come una v.a. normale di media $\mu = 4\,cm$ e varianza $\sigma^2 = 0.04\,cm^2$. Il 5% dei regoli che hanno lunghezza minore e il 5% di quelli che hanno lunghezza superiore alla media viene scartato.
Si chiede la lunghezza minima e quella massima dei pezzi che sono sicuramente accettati.

SOLUZIONE:

Sia X la v.a. che rappresenta la lunghezza del regolo. Sappiamo che $X \sim N(4, 0.04)$ e indichiamo con L la lunghezza massima. Poiché vogliamo scartare il 5% dei pezzi di lunghezza superiore a L, avremo

$$0.05 = \mathbb{P}(X > L) = 1 - \mathbb{P}(X \leq L) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{L-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right),$$

ovvero

$$\Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right) = 0.95$$

e, passando ai quantili

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = z_{0.95} \Rightarrow L = \sigma z_{0.95} + \mu \simeq 4.33\,.$$

b) Per quanto riguarda la lunghezza minima ℓ, ricordiamo che la densità normale è simmetrica rispetto alla media, quindi

$$\ell = \sigma z_{0.95} - \mu \simeq 3.67\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_X(x)$ una funzione definita:

$$f_X(x) = \begin{cases} kxe^{-x}, & x \geq 0\,, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_X(x)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare il valore atteso e la varianza di X;

c) calcolare la funzione di ripartizione F_X .

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = k \quad \text{e quindi} \quad k = 1\,;$$

b) per media e varianza avremo

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = 2, \quad \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \int_0^\infty x^3\, e^{-x}\, dx - 4 = 2\,.$$

c) Per il calcolo della funzione di ripartizione, avremo

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x te^{-t}\, dt = 1 - e^{-x}(1+x) & x \geq 0\,, \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$