C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
3/09/2019

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(2y\sin x + e^y)y' + y^2\cos x = 0 \ .$$

SOLUZIONE:

$$y^2\sin x + e^y = C \ .$$

L'equazione è esatta.

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{7}{5}e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}e^{-x}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - x^2\,, \quad x \in [-1,1]$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come funzione di periodo 2, i.e.

$$f(x+2) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\pi n x}{n^2}\,.$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

La vita media (misurata in anni) di un macchinario viene rappresentata come una v.a. X che segue una legge esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{10}$, i.e. $X \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\,, \; x \geq 0 \\ 0 \qquad \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare la probabilità che la durata di vita superi i 10 anni;

b) sapendo che un certo macchinario ha già 10 anni, calcolare la probabilità che la sua durata superi i 12 anni;

c) confrontare il risultato precedente che la probabilità che un macchinario nuovo abbia durata di vita superiore a due anni.

SOLUZIONE:

a) $\mathbb{P}(X \geq 10) = \frac{1}{10}\int_{10}^{\infty} e^{-\frac{x}{10}}dx = e^{-1}\,;$

b) $\mathbb{P}\left(X \geq 12 | X \geq 10\right) = \frac{\mathbb{P}((X\geq 12)\cap(X\geq 10))}{\mathbb{P}(X\geq 10)} = \frac{\mathbb{P}(X\geq 12)}{\mathbb{P}(X\geq 10)}\,.$

Ma $\mathbb{P}(X \geq 12) = \frac{1}{10}\int_{12}^{\infty} e^{-\frac{x}{10}}dx = e^{-\frac{6}{5}}$; e quindi

$$\mathbb{P}\left(X \geq 12 | X \geq 10\right) = e^{-\frac{1}{5}}\,.$$

c) La distribuzione esponenziale è caratterizzata dall'assenza di memoria, quindi ci dobbiamo aspettare che per un macchinario nuovo $\mathbb{P}(X \geq 2)$ sia comunque uguale a $\mathbb{P}\left(X \geq 12 | X \geq 10\right)$. Infatti

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \frac{1}{10} \int_2^{\infty} e^{-\frac{x}{10}} dx = e^{-\frac{1}{5}} \, .$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Il contenuto dei pacchetti di caffè di una certa azienda è dichiarato essere di 100 gr, ma per le variazioni nel processo di riempimento, il peso del caffè può essere considerato come una v.a. normale $X \sim N(\mu, (1.1)^2)$, la cui unità di misura è il grammo. Si chiede:

a) se la macchina che opera il riempimento dei pacchetti è regolata su una media $\mu = 101,2gr$, qual è la probabilità che il peso del prodotto in un pacchetto sia inferiore al peso annunciato di 100 gr?

b) Su quale valore della media μ conviene regolare la macchina in modo che non più del 4% dei pacchetti contenga un peso inferiore a 100 gr?

SOLUZIONE:

a) dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X \leq 100)$ sapendo che $X \sim N(101,2,(1.1)^2)$. Passando alla v.a. normale standard Z avremo

$$\mathbb{P}(X \leq 100) = \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{1.2}{1.1} = -1.09\right) = 1 - \Phi(1.09) = 0.1379$$

dalla tavola della normale standard.

b) Dobbiamo calcolare μ in modo che $\mathbb{P}(X \leq 100) \leq 0.04$. Passando alla normale standard avremo

$$0.04 \geq \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{100-\mu}{1.1}\right) = \Phi\left(\frac{100-\mu}{1.1}\right) .$$

Ma $z_{0.04} = -1.75$ e quindi

$$\frac{100-\mu}{1.1} = -1.75 \quad \text{e} \quad \mu = 101.925 \, gr \, .$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia X una v.a. di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1, e] \ , \\ \\ 0 & \text{altrove} \, . \end{cases}$$

Si chiede:

a) determinare la funzione di ripartizione $F_X(x)$;

b) calcolare $\mathbb{E}\,(X)$ e $\text{Var}[X]$;

c) calcolare $\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2) \leq 0$.

SOLUZIONE:

a) $F_X(x) = 0 \quad \forall x < 1$ e $F_X(x) = 1 \quad \forall x > e$

$\forall x \in [1, e] \quad F_X(x) = \int_1^x \frac{ds}{s} = \log x$. Quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 1\,, & x > e \\ \\ \log x, & x \in [1, e] \ , \\ \\ 0 & x < 1\,. \end{cases}$$

b) $\mathbb{E}[X] = \int_1^e \frac{x}{x} dx = e - 1\,;$

$\text{Var}[X] = \int_1^e \frac{x^2}{x} dx - (e-1)^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e-1)^2 = \frac{4e - e^2 - 3}{2}\,;$

c) $\mathbb{P}\,(X^2 - 3X + 2 \leq 0) = \mathbb{P}((X-2)(X-1) \leq 0)$. Ma, nell'intervallo $[1, e]$ la disequazione è verificata $\forall x \in [1, 2]$. Quindi occorre calcolare

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2\,.$$