C.d.L. in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
4/09/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'(3 + 4y \sin x) + y^2 \cos x = 0 \ .$$

SOLUZIONE:

$$y^3(1 + y \sin x) = C \ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \ , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{\sqrt{5}}{10} \exp\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right) \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{10} \exp\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\right) \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin\left|\frac{x}{2}\right| \,,\; x \in [-\pi, \pi]\,.$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:
$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2 - 1}\,.$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Un'azienda produce 3 modelli di tostapane, che indicheremo con A, B e C. A costituisce il 60% della produzione, B e C ne costituiscono ciascuno il 20%. Il collaudo dei tostapane è superato all'85% dal tipo A, al 90% dal tipo B e al 95% dal tipo C. Calcolare la probabilità che un tostapane preso a caso superi il collaudo

SOLUZIONE:

Indichiamo con T l'evento "il tostapane supera il collaudo". Sappiamo inoltre che A, B e C costituiscono una partizione per lo spazio campionario "produzione di tostapani" con
$$\mathbb{P}(A) = 0.6\,,\; \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0.2\,.$$
Usando il teorema delle probabilità totali abbiamo
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|A) + \mathbb{P}(T|B) + \mathbb{P}(T|C) = 0.85 \times 0.6 + 0.9 \times 0.2 + 0.95 \times 0.2\,,$$
quindi
$$\mathbb{P}(T) = 0.88\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un birrificio produce bottiglie che contengono in media 33 cl di birra. Le bottiglie che contengono meno di 30 cl di birra dovrebbero essere scartate. Considerando che il prodotto sia rappresentato da una v.a. X che segue una legge normale di media $\mu = 33$ e varianza $\sigma^2 = 0.81$, $X \sim N(33; 0.81)$, si chiede:

a) la probabilità che una bottiglia contenga meno di 30 cl di birra;

b) mantenendo la media a 33 cl, quale valore dovrebbe avere la varianza per avere non più del 2% di bottiglie con contenuto inferiore a 30 cl? .

SOLUZIONE:

a) $\mathbb{P}(X < 30) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu < 30) = \mathbb{P}(Z < \frac{30-33}{0.9}) = \mathbb{P}(Z < -3.33) = \Phi(-3.33) = 1 - \Phi(3.33) \simeq 0.00043$.

b) L'ipotesi è che $\mathbb{P}(X < 30) = 0.02$, ovvero che

$$0.02 = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu < 30) = \mathbb{P}\left(Z < -\frac{3}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) .$$

Quindi

$$\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0.98 \simeq \Phi(2.06) .$$

Di conseguenza

$$\frac{3}{\sigma} \simeq 2.06 \qquad \sigma \simeq 1.456 \quad \text{e} \quad \sigma^2 \simeq 2.12 .$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kye^x, & 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\,, \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k in modo che la $f_{XY}(x,y)$ possa rappresentare una densità di probabilità;

b) calcolare le densità marginali e le rispettive medie;

c) valutare l'eventuale indipendenza delle v.a. X e Y e motivare il risultato ottenuto .

SOLUZIONE:

a) Per il calcolo di k, si pone

$$1 = k\int_0^1\int_0^1 ye^x dydx = \frac{k}{2}\int_0^1 e^x dx = \frac{k}{2}(e-1) \quad \text{e quindi} \quad k = \frac{2}{e-1}\,;$$

b) per le densità marginali

$$f_X(x) = \frac{2}{e-1}\int_0^1 ye^x dy = \frac{e^x}{e-1}\,,\ 0 \le x \le 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,;$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{e-1}\int_0^1 ye^x dx = 2y\,,\ 0 \le y \le 1\,,\ \text{e 0 altrove}\,.$$

$$\mu_X = \int_0^1 x\frac{e^x}{e-1}dx = \frac{1}{e-1}\,;$$

$$\mu_Y = \int_0^1 y\cdot 2ydy = \frac{2}{3}\,;$$

c) come si verifica facilmente $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, quindi le due v.a. sono indipendenti.