**PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI
COMPITO B**

17/12/2007

Prof. G. Borgioli

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

CdL:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 8):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} + 2 = x^2 + 2y^3 - x^2y^3.$$

SOLUZIONE:

$$\frac{1}{6} \log \frac{y^2 + y + 1}{(1 - y)^2} + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y + 1}{\sqrt{3}} = \frac{x^3}{3} - 2x + C .$$

ESERCIZIO 2 (punti 8):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y'' + 4y = \sin 2x , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{5}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x .$$

ESERCIZIO 3 (punti 10):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x - x^2, \quad x \in [0, 1]$$

e la si prolunghi in modo dispari nell'intervallo $[-1, 0)$. Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3} \sin(2n-1)\pi x \right].$$

ESERCIZIO 4 (punti 4):

Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{z-2} + 1 = \frac{-2+i}{1+2i}.$$

SOLUZIONE:

$$z = 2 + \frac{1}{2} \log 2 + i \left(\frac{3}{4} \pi + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$