C.d.L. in Ingegneria Elettronica

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI
09/01/2006

Prof. G. Borgioli

COGNOME:
NOME:
N. matricola:

ESERCIZIO 1 (**punti 8**):

Verificare se la seguente equazione differenziale sia esatta e, in caso affermativo, risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$2x^2 e^{xy} \frac{dy}{dx} + 2(1+xy)e^{xy} = 0 \ , \qquad y(1) = \log 2 \, .$$

SOLUZIONE:

$$xe^{xy} = 2 \ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 8**):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' + 16y = 1 + 2\sin 4x \ .$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} x\cos 4x + A\cos 4x + B\sin 4x \ .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 10**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , \quad -\pi < x \le \frac{\pi}{2} \\ \\ 2\cos x\ , \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \\ 0\ , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)\ .$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{(n+1)}\cos 2nx}{4n^2 - 1}\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 4**):

Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^6 + 1 = i\ .$$

SOLUZIONE:

$$z = 2^{\frac{1}{12}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)\ , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\ .$$