

C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. in Ingegneria delle Telecomunicazioni

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI

10/07/2007

Prof. G. Borgioli

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

CdL:

ESERCIZIO 1 (punti 8):

Verificare se la seguente equazione differenziale sia esatta:

$$y' (2ye^x - x \cos(xy)) + y^2 e^x - y \cos(xy) = 0 .$$

In caso affermativo, risolvere il problema ai valori iniziali con la condizione $y(1) = \pi$.

SOLUZIONE:

L'equazione è esatta;

$$y^2 e^x - \sin(xy) = \pi^2 e .$$

ESERCIZIO 2 (punti 8):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y'' + y' - 2y = x + x^2 , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{x^2}{2} - x - 1 .$$

ESERCIZIO 3 (punti 10):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x \leq 0, \\ \pi, & 0 < x \leq +\pi \end{cases}$$

La si prolunghi in modo periodico, di periodo 2π , su tutto $\mathbb{R}$ (i.e. $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx .$$

ESERCIZIO 4 (punti 4):

Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^6 + 1 = -2i ,$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria

SOLUZIONE:

$$z = (5)^{\frac{1}{12}} \left[\cos \left(\frac{\bar{\theta} + (2k+1)\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\bar{\theta} + (2k+1)\pi}{6} \right) \right] ,$$

dove $\bar{\theta} = \arctan 2$ e $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.