

C.d.L. in Ingegneria Elettronica

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI

12/07/2006

Prof. G. Borgioli

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

ESERCIZIO 1 (punti 8):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$xy' - y = \log x .$$

SOLUZIONE:

$$y = -\log x - 1 + Cx .$$

ESERCIZIO 2 (punti 8):

Calcolare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali:

$$y'' + y = x \sin x , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 .$$

SOLUZIONE:

$$y = \sin x - \frac{1}{4} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \sin x .$$

ESERCIZIO 3 (punti 10):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases},$$

la si prolunghi in modo pari nell'intervallo $[-2, 0)$ e se ne tracci il grafico.
Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier, considerandola come una funzione periodica di periodo 4 (i.e. $f(x+4) = f(x)$).

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\pi n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x + \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4 (punti 4):

Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^5 - i = 1.$$

SOLUZIONE:

$$z = 2^{\frac{1}{10}} \left(\cos \frac{\pi/4 + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi/4 + 2k\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$