C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
13/06/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Verificare se la seguente equazione differenziale è esatta:

$$y'\,(2ye^x - x\cos(xy)) + y^2e^x - y\cos(xy) = 0\,.$$

In caso affermativo, risolvere il problema ai valori iniziali con la condizione $y(1) = \pi$.

SOLUZIONE:

$$y^2\,e^x - \sin(xy) = \pi^2\,e\ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3x} - e^x \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x \le 0 \\ \pi, \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Se ne disegni il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2π.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si lancia un dado equilibrato per cinque volte. Si chiede:
a) calcolare la probabilità che escano due 1 ;
b) calcolare la probabilità che escano non più di due 1;

SOLUZIONE:

L'uscita di una faccia ha probabilità $\frac{1}{6}$ e i cinque lanci costituiscono tutti eventi indipendenti. Quindi, indicato con A l'evento "escono due 1", avremo

a) $\mathbb{P}(A) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = 16,1\%\,;$

Sia B l'evento "escono non più di due 1".

b) $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{2}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-k} = 96,5\%\,.$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Sia X una variabile aleatoria normale, di media 2 e varianza 9, $X \sim N(2,9)$ e Y una variabile aleatoria, t.c. $Y = 2X - 1$. Si chiede:

a) il valore della media e della varianza di Y;

b) la probabilità $\mathbb{P}(Y > 1)$.

SOLUZIONE:

$\mu_Y = \mathbb{E}(2X-1) = 2\mathbb{E}(X) - 1 = 3$ per la linearità della speranza matematica. Inoltre $\mathbb{E}(X^2) = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = 9 + 4 = 13$. In conclusione

a) $Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mu_Y^2 = \mathbb{E}[4X^2 - 4X + 1] - 9 = 4\mathbb{E}[X^2] - 4\mathbb{E}[X] + 1 = 52 - 8 + 1 = 45\,.$

$Y = 2X - 1$, quindi $Y > 1$ se $X > 1$. Quindi, ricorrendo alla v.a. normale standard $Z = \frac{X-2}{3}$ e successivamente alle tavole della normale standard, avremo

$$\mathbb{P}((X > 1) = \mathbb{P}(3Z + 2 > 1) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{1}{3}\right) = 1 - \Phi(-0.33) = \Phi(0.33) = 0.62930\,.$$

In conclusione

b) $\mathbb{P}(Y > 1) = 0.62930\,.$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 < 2x < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e dire se le due variabili sono indipendenti;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2})\,.$

SOLUZIONE:

Per il calcolo di k, si pone

$$k \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{2}} xy dx dy = 1\,,$$

ottenendo

$$1 = k \int_0^1 y \frac{x^2}{2} \Big|_0^{y/2} dy = \frac{k}{8} \int_0^1 y^3 dy = \frac{k}{32} y^4 \Big|_0^1 = \frac{k}{32};$$

quindi

a) $k = 32$.

b) $f_X(x) = 32 \int_{2x}^1 xy dy = 16x(1-4x^2)$, $\quad f_Y(y) = 32 \int_0^{\frac{y}{2}} xy dx = 4y^3$; Le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_Y(y) dy = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} y^3 dy = \frac{1}{16}$.