C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
14/02/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$xy^3y' = x^4 + y^4 \,.$$

SOLUZIONE:

$$y^4 = x^4(4\log|x| + C) \,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3x} + e^{-x} \\ e^{3x} - e^{-x} \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione
$$f(x) = 2x - x^2\,, \quad x \in [0,1]\ .$$

e la si prolunghi in modo dispari nell'intervallo $[-1,0)$. Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:
$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)\pi x\right]\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si considerino tre eventi A, B, C con le seguenti proprietà:

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,,$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0\,,$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1\,,$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.3\,.$

Si chiede di calcolare la probabilità $\mathbb{P}(C)\,.$

SOLUZIONE:

Si può partire sviluppando la probabilità dell'unione dei tre eventi:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))\,.$$

Ma
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$$

e

$$\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = 0$$

per le ipotesi. In conclusione

$$1 = 0.6 - 0.09 + \mathbb{P}(C) \Longrightarrow \mathbb{P}(C) = 0.49\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Sia Y una v.a. tale che $Y = 2X - 1$, dove X è ua v.a. continua, uniformemente distribuita sull'intervallo $(-1,1)$, $X \sim U((-1,1))$. Si calcoli la media μ_Y di Y, la sua varianza σ_Y^2 e la probabilità $\mathbb{P}(|Y - \mu_Y| < \sigma_Y)$.

SOLUZIONE:

La densità di probabilità di X è

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La v.a. Y risulta definita uniformemente sull'intervallo $(-3,1)$; di conseguenza la sua densità di probabilità è

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,, & y \in (-3,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

quindi

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} y\,dy = -1\,.$$

Poiché $\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mu_Y^2$, basta calcolare

$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} y^2\,dy = \frac{7}{3}\,,$$

e

$$\sigma_Y^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}\,.$$

$$\mathbb{P}(|Y - \mu_Y| < \sigma_Y) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(|Y+1| < \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(|X| < \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 1 \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y \le X^2)$.

SOLUZIONE:

a) $k = \frac{3}{2}$;

b) $f_X(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right|_{y=0}^{y=1} = \frac{3x^2+1}{2}$;

$f_Y(y) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(xy^2 + \frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{3y^2+1}{2}$;

c) $\mathbb{P}(Y \le X^2) = \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy(x^2+y^2) = \frac{13}{35} \simeq 37.14\%$.