

C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni  
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

**PROVA SCRITTA**

**16/09/2016**

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

**Prova orale:**

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y = 4x \sin x .$$

SOLUZIONE:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x^2 \cos x + x \sin x .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, & y_1(0) = 2 \\ y_2' = y_1 - y_2, & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

dove la funzione incognita  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

SOLUZIONE:

$$y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x} ,$$

$$y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} .$$

**ESERCIZIO 3 (punti 5):**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

**SOLUZIONE:**

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2 - \frac{1}{4}} \sin nx.$$

**ESERCIZIO 4 (punti 5):**

Si lanci un dado regolare finché non esce il “2”. Sia  $X$  la v.a. che indica il numero dei lanci fatti prima che esca il “2”.

Calcolare la densità di probabilità di  $X$ ; si chiede inoltre:

- a) qual'è la probabilità che “2” esca al quarto lancio?
- b) qual'è la probabilità che “2” esca in uno dei primi tre lanci e dopo sei lanci?

**SOLUZIONE:**

Distribuzione geometrica:  $\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

a)

$$\mathbb{P}(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} \simeq 9.65\%.$$

b)

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \simeq 42.13\%, \quad \mathbb{P}(X \geq 7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 6) = 1 - \sum_{n=1}^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \simeq 33.49\%.$$

**ESERCIZIO 5 (punti 5):**

Sia  $X$  una v.a. discreta, definita dalla seguente legge di probabilità

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6} \quad \text{e } 0 \text{ altrove}$$

- a) Si calcoli la densità di probabilità discreta della v.a.  $Y = 2X^2$ ;
- b) calcolare la media e la varianza di  $Y$ .

**SOLUZIONE:**

a)  $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}$ .

b)  $\mu_Y = \frac{2}{3}, \quad \sigma_Y^2 = \frac{8}{9}$

**ESERCIZIO 6 (punti 5):**

Sia  $f_{XY}(x, y)$  una funzione di densità congiunta di due v.a.  $X, Y$ , definita:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kx^2y, & x, y \text{ t.c. } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

- a) Calcolare il valore di  $k$ ;
- b) calcolare le densità marginali .

**SOLUZIONE:**

a)  $k = \frac{21}{4}$ ;

b)  $f_X(x) = \frac{21x^2(1-x^4)}{8}, \quad -1 \leq x \leq 1$  e 0 altrove,  $f_Y(y) = \frac{7y^2\sqrt{y}}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1$  e 0 altrove.