**C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni**
**Corso di Metodi Matematici e Probabilistici**

**Prof. Giovanni Borgioli**

# PROVA SCRITTA
# 17/01/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
**Prova orale**:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\left(x^2 \sin x + \frac{x}{1 + x^2y^2}\right) y' + 2xy \sin x + x^2 y \cos x + \frac{y}{1 + x^2y^2} = 0\,.$$

SOLUZIONE:

$$x^2 y \sin x + \arctan(xy) = C\ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} e^{(2+\sqrt{5})x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} e^{(2-\sqrt{5})x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 + \sin x\,, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) \sim 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \sin 2nx\,.$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si lanciano tre monete eque:

a) qual'è la probabilità di ottenere tre teste?
b) qual'è la probabilità di ottenere tre teste, condizionata dal sapere che il numero di teste sia dispari?
c) qual'è la probabilitàdi ottenere tre teste, condizionata dal sapere che il numero di teste sia pari?

SOLUZIONE:

a) Sia $A$ l'evento "esce testa", la probabilità di uscita di tre teste sarà, per l'indipendenza degli eventi: $\mathbb{P}(A = 3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

b)Sia $D_T$ l'evento "il numero di teste è dispari" e $P_T$ l'evento "il numero di teste è pari". La probabilità desiderata è $\mathbb{P}(A = 3|D_T)$. Usando la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(A = 3|D_T) = \frac{\mathbb{P}(D_T|A = 3)\mathbb{P}(A = 3)}{\mathbb{P}(D_T)} = \frac{1}{4}\,,$$

dove $\mathbb{P}(D_T|A = 3) = 1\,, \mathbb{P}(D_T) = \frac{1}{2}\,;$

c)Analogamente

$$\mathbb{P}(A = 3|P_T) = \frac{\mathbb{P}(P_T|A = 3)\mathbb{P}(A = 3)}{\mathbb{P}(P_T)} = 0\,,$$

dove $\mathbb{P}(P_T|A = 3) = 0\,.$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

In un incrocio pericoloso si verificano in media due incidenti alla settimana. Applicando la distribuzione di Poisson, si chiede:

a) qual'è la probabilità che l'indomani non si verifichino incidenti?

b) Qual è il periodo minimo durante il quale c'è più del 95% di probabilità che si verifichi almeno un incidente?

SOLUZIONE:

La distribuzione di Poisson stima la probabilità che la v.a. $X$ assuma il valore $k$ con la distribuzione $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ e 0 altrimenti. Nel nostro caso $\lambda = \frac{2}{7}$, quindi:

a)Definiamo $X_T$ la v.a. che indica il numero di incidenti che avvengono nel tempo $T$, misurato in giorni:
$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \exp(-\frac{2}{7}) \simeq 75.15\%\,;$

b)$\mathbb{P}(X_T \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X_T = 0) = 1 - \exp(-\frac{2T}{7}) \geq 0.95$ . Quindi $T > -\frac{7}{2}\log(0.05) \simeq$ 10.5 giorni.

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x, y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. $X$, $Y$, definita:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y), & 0 < x < y < 2 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di $k$;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y < 1)$.

SOLUZIONE:

a) $k = \frac{1}{4}$;

b) $f_X(x) = \int_x^2 \frac{x^2+y}{4} dy = \frac{4+3x^2-2x^3}{8}$ , $\quad f_Y(y) = \int_0^y \frac{x^2+y}{4} dy = \frac{y^3+3y^2}{12}$ ;

c) $\mathbb{P}(Y < 1) = \int_0^1 f_Y(y)dy = \frac{5}{48} \simeq 0.104\,.$