

C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA

19/09/2017

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 5):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale :

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 2y}.$$

SOLUZIONE:

$$x^2y + y^2 = C .$$

ESERCIZIO 2 (punti 5):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^x \left[\frac{\sqrt{6}}{6} e^{\sqrt{6}x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2 + \sqrt{6}) \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{6}}{6} e^{-\sqrt{6}x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2 - \sqrt{6}) \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

ESERCIZIO 3 (punti 5):

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \sin x \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Se ne disegni il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2π .

SOLUZIONE:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1}.$$

ESERCIZIO 4 (punti 5):

Un'azienda produce batterie e la probabilità che un pezzo sia difettoso è il 2%. In un lotto di 50 pezzi, qual'è la probabilità che

- a) ci siano due pezzi difettosi;
- b) non ci siano più di tre pezzi difettosi.

SOLUZIONE:

La probabilità richiesta è calcolabile per mezzo della distribuzione binomiale. Quindi, indicata con X la v.a. che rappresenta il numero di pezzi difettosi, avremo

a) $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{50}{2} p^2 (1-p)^{48} = \frac{50!}{48!2!} (0.02)^2 (0.98)^{48} \simeq 18.6\%$;

b) $\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} \simeq 98.25\%$.

ESERCIZIO 5 (punti 5):

Una variabile aleatoria X segue una legge normale di media 10 e varianza 9, $X \sim N(10, 9)$. Si chiede per quale valore assunto dalla X , si ha

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{F}_X(x) = 0.8.$$

SOLUZIONE:

La relazione fra X e la v.a. standardizzata Z è $X = 3Z + 10$, quindi

$$0.8 = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(3Z + 10 \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-10}{3}\right) = \Phi\left(\frac{x-10}{3}\right).$$

Dalle tavole, il quantile $z_{0.8}$ è uguale a 0.84, quindi

$$x = 3 \times 0.84 + 10 = 12.52.$$

ESERCIZIO 6 (punti 5):

Sia X una v.a. di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

- a) Calcolare il valore di k , il valore atteso e la varianza di X ;
- b) calcolare la densità della v.a. $Y = 3X + 2$.

SOLUZIONE:

Per il calcolo di k , si pone

$$k \int_{-1}^1 x^2 dx = 1,$$

ottenendo

a) $k = \frac{3}{2}$.

Inoltre

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0,$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{3}{5},$$

b) La relazione fra le due v.a. è

$$X = \frac{Y - 2}{3} \implies f_Y(y) = f_X\left(\frac{Y - 2}{3}\right) =$$

In conclusione

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{18}(y - 2)^2, & -1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

z	Seconda cifra decimale di z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1 - \Phi(z)]$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001