C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI

24/03/2009

Prof. G. Borgioli

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
CdL: **Prova orale**:

ESERCIZIO 1 (**punti 6**):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y^3 x y' = x^4 + y^4 \ , \quad y(1) = 4 \ .$$

SOLUZIONE:

$$y^4 = x^4(4 \log x + 256) \ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 8**):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-4x} \ , \qquad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \ .$$

SOLUZIONE:

$$y = -\frac{7}{5}e^{x} + \frac{4}{3}e^{2x} + \frac{1}{15}e^{-4x} \ .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 10**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & -\pi \le x < 0 \\ \\ x^2\ , & 0 \le x \le \pi\ , \end{cases}$$

e la si prolunghi in modo periodico, di periodo 2π. Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} +$$

$$(1+\pi)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 6**):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale del secondo ordine (**oscillatore armonico smorzato e forzato**):

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \omega^2 x = 2\sin 2t\ .$$

Si calcoli il valore di ω per il quale l'ampiezza della soluzione particolare risulta massima (**risonanza**). Per questo valore si calcoli la soluzione del problema ai valori iniziali, con le condizioni $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

SOLUZIONE:

$$x = e^{-t}\left(C_1 e^{\sqrt{1-\omega^2}t} + C_2 e^{\sqrt{1+\omega^2}t}\right) + \frac{2}{\sqrt{(\omega^2-4)+16}} \sin\left(2t - \arctan\frac{4}{\omega^2-4}\right)$$

$$\omega = 2$$

$$x = e^{-t}\left(\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\sqrt{3}t\right) - \frac{1}{2}\cos 2t\ .$$