**C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni**
**Corso di Metodi Matematici e Probabilistici**

**Prof. Giovanni Borgioli**

# PROVA SCRITTA
# 31/01/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
**Prova orale**:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \, .$$

SOLUZIONE:

$$y \, e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = C \, .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \, , \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} - e^{x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} .$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Se ne disegni il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2.

SOLUZIONE:

$$f(x) \sim \frac{5}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3} \ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si lanciano otto dadi equi. Si chiede:
a) calcolare la probabilità che escano otto 2 ;
b) calcolare la probabilità che escano otto numeri uguali;
c) calcolare la probabilità che la somma degli otto numeri usciti faccia 9.

SOLUZIONE:

L'uscita di una faccia ha probabilità $\frac{1}{6}$ e gli otto lanci costituiscono tutti eventi indipendenti. Quindi, indicato con $A$ l'evento "escono otto 2", avremo

a) $\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^8$ ;

Sia $B$ l'evento "escono otto numeri uguali". Per il primo dado la probabilità che esca un numero è ovviamente 1, per ciascuno degli altri sette dadi la probabilità che esca il numero uscito sul primo è $\frac{1}{6}$, quindi

b) $\mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^7$ ;

sia $C$ l'evento "la somma degli otto numeri usciti fa 9". L'unica situazione possibile è costituita da sette "1" e un "2", il che corrisponde ad otto diverse possibili sequenze di uscite. Il risultato è

c) $\mathbb{P}(C) = 8\left(\frac{1}{6}\right)^8$ .

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Sia $X$ una variabile aleatoria normale, di media 1 e varianza 4, $X \sim N(1,4)$ e $Y$ una variabile aleatoria, t.c. $Y = X^2 - 3X$. Si chiede:

a) il valore della media di $Y$;

b) la probabilità $\mathbb{P}(Y > 0)$.

SOLUZIONE:

$\mu_Y = \mathbb{E}(X^2 - 3X) = \mathbb{E}(X^2) - 3\mu_X = \mathbb{E}(X^2) - 3$ per la linearità della speranza matematica. Inoltre $\mathbb{E}(X^2) = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = 5$ . In conclusione

a) $\mu_Y = 2$

$Y = X(X-3)$ , quindi $Y > 0$ se $X < 0$ oppure $X > 3$, che rappresentno due eventi incompatibili. Quindi

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}\left((X < 0)\bigcup(X > 3)\right) = \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X > 3)\,.$$

Ricorrendo alla v.a. normale standard $Z = \frac{X-1}{2}$ e successivamente alle tavole della normale standard, avremo

$$\mathbb{P}((X < 0) = \mathbb{P}((Z < -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854\,,$$

$$\mathbb{P}((X > 3) = 1 - \mathbb{P}((X < 3) = 1 - \mathbb{P}((Z < 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841340 = 0.15866\,.$$

In conclusione

b) $\mathbb{P}(Y > 0) = 0.4672$ .

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. $X$, $Y$, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx\exp(-x(1+y)), & x \geq 0\,, y \geq 0 \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di $k$;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e dire se le due variabili sono indipendenti;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(X > 3)$ .

SOLUZIONE:

Per il calcolo di $k$, si pone

$$k \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp(-x(1+y)) dx dy = 1 \,,$$

ottenendo

a) $k = 1$;

b) $f_X(x) = \int_0^\infty x \exp(-x(1+y)) dy = e^{-x}$ , $\quad f_Y(y) = \int_0^\infty x \exp(-x(1+y)) dx = \frac{1}{(1+y)^2}$ ;
Le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{P}(X > 3) = \int_3^\infty e^{-x} dx = e^{-3}$ .

**Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:**

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

| | Seconda cifra decimale di $z$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91308 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |
| 3.8 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99995 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |

| $z$ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 | 3.891 | 4.417 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.999 | 0.9995 | 0.99995 | 0.999995 |
| $2[1-\Phi(z)]$ | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.002 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 |