C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
4/07/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$y' + \frac{y}{x} = 2y^4\,,\ y(1) = 1.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x - 2x^3}}\ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$y'' + 4y = \sin 2x\,, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{5}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x\,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = |x|\,;\; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] .$$

Se ne disegni il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 1.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2} .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si lancia una moneta equa; se esce testa si lancia un dado equo, se esce croce si lancia lo stesso dado due volte. Qual'è la probabilità che il punteggio finale sia 4?

SOLUZIONE:

La risposta si ottiene facilmente considerando i due eventi:
A : esce testa e il lancio del dado dà 4;
B : esce croce e i due lanci successivi del dado danno 4 come somma dei risultati.

L'uscita "4" ha probabilità $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, poiché i due eventi sono incompatibili fin dal primo passo (o esce testa o esce croce).
Ma

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = 0.083$$

e

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = 0.028\,.$$

In questo secondo risultato le uscite del primo lancio di dado compatibili con il "4" finale sono 3, ovvero le facce 1,2,3, mentre al lancio successivo, solo una faccia su sei dà il risultato cercato. In conclusione

$$\mathbb{P}(\text{“4”}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,111\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Di una variabile aleatoria normale X, si sa che $\mathbb{P}(X < 3.95) = 0.05$ e che $\mathbb{P}(X > 4.05) = 0.12$. Si chiede:

a) il valore della media e della varianza di X;

b) la probabilità $\mathbb{P}(X > 1)$.

SOLUZIONE:

Per il calcolo di media e varianza, si passa alla distribuzione normale standard della v.a. Z:

$$\mathbb{P}(X < 3.95) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu < 3.95) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) = 0.05\,;$$

$$\mathbb{P}(X > 4.05) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu > 4.05) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) = 0.12\,;$$

Ricorrendo alle tavole della funzione di distribuzione cumulativa della normale standard, abbiamo

$$\Phi\left(\frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 = \Phi(-1.645)\,, \quad \Phi\left(\frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.12 = 0.88 = \Phi(1.175)\,.$$

Otteniamo quindi media e deviazione standard risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{3.95-\mu}{\sigma} = -1.645 \\ \\ \frac{4.05-\mu}{\sigma} = 1.175\,. \end{cases}$$

In conclusione

a) $\mu \simeq 4.01\,, \quad \sigma \simeq 0.035\,.$

$$\mathbb{P}((X > 1) = \mathbb{P}(0.035Z + 4.01 > 1) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{3.01}{0.035}\right) = 1 - \Phi(-86) = \Phi(86)\,.$$

In conclusione

b) $\mathbb{P}(X > 1) \sim 0.999\,.$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x, y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy^2, & x, y > 0, \text{t.c. } y^2 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e dire se le due variabili sono indipendenti;

c) calcolare la probabilità $\mathbb{P}(X > \frac{1}{3})$.

SOLUZIONE:

Per il calcolo di k, si pone

$$k \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} xy^2 dx dy = 1\,,$$

ottenendo

$$1 = k \int_0^1 x \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{k}{3} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2k}{21};$$

quindi

a) $k = \frac{21}{2}$.

b) $f_X(x) = \frac{21}{2} \int_0^{\sqrt{x}} xy^2 dy = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}}$, $\quad f_Y(y) = \frac{21}{2} \int_{y^2}^1 xy^2 dx = \frac{21}{4} y^2 (1 - y^4)$;
Le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{P}(X > \frac{1}{3}) = \frac{7}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 x^{\frac{5}{2}} dx = x^{\frac{7}{2}} \Big|_{\frac{1}{3}}^1 \sim 0.98$.

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\,t^2}\, dt$$

	Seconda cifra decimale di z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1-\Phi(z)]$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001