C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
5/09/2017

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale :

$$y' - y = xy^4 \,.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{Ce^{-3x} + \frac{1}{3} - x}} \,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y} \,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 + x \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)^2 \quad 0 \le x \le 1$$

e la si prolunghi pari sull'intervallo $[-1, 0)]$.

Se ne disegni il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier come una funzione di periodo 2.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} \, .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Abbiamo due urne, U_1 e U_2. La prima contiene due palline bianche e quattro nere e la seconda contiene tre palline bianche e cinque nere.
Si lancia una moneta regolare e poi si estraggono insieme due palline dall'urna U_1, se esce testa, oppure due palline dall'urna U_2, se esce croce. Qual'è la probabilità di ottenere due palline bianche (evento BB).

SOLUZIONE:
La probabilità di estrarre le palline dall'urna U_1 (o, rispettivamente, dall'urna U_2) è uguale a $\frac{1}{2}$ (moneta equilibrata). Quindi, la probabilità che si realizzino entrambi gli eventi U_1 e BB è data da

$$\mathbb{P}(U_1 \cap BB) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(BB|U_1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(BB|U_1) \, .$$

Ma ci sono $\binom{6}{2} = 15$ modi di estrarre coppie di palline e una sola coppia di bianche, quindi

$$\mathbb{P}(BB|U_1) = \frac{1}{15} \, .$$

Analogamente per l'estrazione da U_2 avremo:

$$\mathbb{P}(U_2 \cap BB) = \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(BB|U_2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(BB|U_2) \, .$$

Ci sono $\binom{8}{2} = 28$ modi di estrarre coppie di palline e $\binom{3}{2} = 3$ modi di estrarre una coppia di bianche, quindi

$$\mathbb{P}(BB|U_2) = \frac{3}{28} \, .$$

La probabilità di estrarre due palline bianche è quindi data da

$$\mathbb{P}\left((U_1 \cap BB) \cup (U_2 \cap BB)\right) = \mathbb{P}(U_1 \cap BB) + \mathbb{P}(U_2 \cap BB)$$

per l'incompatibilità degli eventi "urna U_1 o urna U_2". In conclusione

$$\mathbb{P}\left((U_1 \cap BB) \cup (U_2 \cap BB)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15} + \frac{3}{28}\right) = \frac{73}{840} = 0.0869 \sim 8.7\% \,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie normali, rispettivmente di media 20 e varianza 4, $X_1 \sim N(20, 4)$ e di media 22 e varianza 16, $X_2 \sim N(22, 16)$. Si chiede quale delle due v.a. abbia maggiore probabilità di assumere valori maggiori di 18.

SOLUZIONE:

La relazione fra X_1 e la v.a. standardizzata Z è $X_1 = 2Z + 20$, quindi

$$\mathbb{P}(X_1 > 18) = \mathbb{P}(2Z + 20 > 18) = \mathbb{P}(Z > -1) \,.$$

La relazione fra X_2 e la v.a. standardizzata Z è $X_2 = 4Z + 22$, quindi

$$\mathbb{P}(X_2 > 18) = \mathbb{P}(4Z + 22 > 18) = \mathbb{P}(Z > -1) \,.$$

La probabilità è quindi la stessa.

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x, y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e dire se le due variabili sono indipendenti;

c) il valore atteso della v.a. $\frac{1}{XY}$.

SOLUZIONE:

Per il calcolo di k, si pone

$$k \int_0^1 \int_0^{1-y} xy^2 dx dy = 1 \,,$$

ottenendo

$$1 = k\int_0^1 y^2 \frac{x^2}{2}\,|_0^{1-y}\; dy = \frac{k}{2}\int_0^1 (y^2 - 2y^3 + y^4)dy = \frac{k}{60};$$

quindi

a) $k = 60$.

b) $f_X(x) = 60\int_0^{1-x} xy^2dy = 20x(1-x)^3$, $\quad f_Y(y) = 60\int_0^{1-y} xy^2dx = 30y^2(1-y)^2$; Le due v.a. non sono indipendenti.

c) $\mathbb{E}(\frac{1}{XY}) = 60\int_0^1\int_0^{1-x} \frac{1}{xy}xy^2dxdy = 10$.