C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
6/09/2016

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$xy' + y^2 e^{-x} = xy\,.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{e^x}{C + \log|x|}\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = \frac{\sqrt{3}}{4} e^{8x} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2} - x^2\,, \quad x \in [-1,1]\ .$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) \sim \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Un'azienda produce batterie per auto in tre diversi stabilimenti, che coprono rispettivamente il 50%, il 30% e il 20% della produzione
Supponiamo che la probabilità di essere difettosa per una batteria prodotta neii tre stabilimenti sia, rispettivamente, il 2%, il 5% e l'1%.
Indicato con A_i l'evento " batteria proveniente dalla fabbrica $i-$esima" e con B l'evento "batteria difettosa", si chiede:

a) qual'è la probabilità che una batteria selezionata a caso dalla produzione dell'azienda sia difettosa?
b) Se una batteria selezionata a caso dalla produzione dell'azienda risulta difettosa, qual'è la probabilità che sia stata prodotta dalla fabbrica n.2?

SOLUZIONE:

a) $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) \simeq 0.027\,.$

b)La probabilità desiderata è $\mathbb{P}(A_2|B)$. Usando la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B)} \simeq 0.556\,.$$

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Sia X una v.a. discreta, definita dalla densità di probabilità

$$p(X=n)=\begin{cases} k\left(\dfrac{1}{4}\right)^n, & n=0,1,2,\dots \\ \\ 0 \quad \text{altrove}\,. \end{cases}$$

a) Si calcoli la costante k;

b) calcolare la probabilità che, rispettivamente si abbia $X=2\,,\ X\le 2\,,\ X\ge 1$.

SOLUZIONE:

a) $k=\frac{3}{4}\,.$

b) $\mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{64}\,,\quad \mathbb{P}(X\le 2)=\frac{63}{64}\,,\quad \mathbb{P}(X\ge 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{4}\,.$

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} k\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\le 4 \\ \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

SOLUZIONE:

a) $k=\frac{3}{16\pi}$;