

PROVA SCRITTA di METODI MATEMATICI

7/04/2009

Prof. G. Borgioli

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

CdL:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 6):

Calcolare la soluzione esplicita del seguente problema ai valori iniziali:

$$x(x-1)y' = y(y+1), \quad y(2) = 2.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{4(x-1)}{4-x}.$$

ESERCIZIO 2 (punti 8):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y'' + 2y' + 2y = 4 \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

SOLUZIONE:

$$y = \frac{4}{5}e^{-x} \sin x + \frac{2}{5}e^{-x} \cos x - \frac{2}{5} \cos 2x + \frac{4}{5} \sin 2x.$$

ESERCIZIO 3 (punti 10):

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$$

e la si prolunghi in modo periodico, di periodo 2π , cioè $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

ESERCIZIO 4 (punti 6):

Disegnare il ritratto di fase per le soluzioni della seguente equazione differenziale, nell'intervallo $x \in [-2, 2]$:

$$\ddot{x} + 3x^2 - 7 = 0$$

SOLUZIONE:

