C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA
8/01/2016

COGNOME:
NOME:
N. matricola:
Prova orale:

ESERCIZIO 1 (**punti 5**):

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(xe^x \cos xy)y' + e^x \sin xy + ye^x \cos xy = 0, \ .$$

SOLUZIONE:

$$e^x \sin xy = C \ .$$

ESERCIZIO 2 (**punti 5**):

Risolvere il seguente PVI:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{y} = \mathbb{A}\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione incognita $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

$$\mathbf{y} = e^{2x}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}x \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}x \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 5**):

Si consideri la funzione
$$f(x) = x\cos x\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\ .$$

Se ne tracci il grafico e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier.

SOLUZIONE:
$$f(x) \sim -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx\ .$$

ESERCIZIO 4 (**punti 5**):

Si lancino due dadi equi senza guardare il risultato.
a) Si calcoli la probabilità che siano uscite due facce uguali;
b) si calcoli la probabilità che le due facce siano uguali sapendo che la loro somma non supera 3.

SOLUZIONE:

a) $\frac{1}{6}$;   b) $\frac{1}{3}$.

ESERCIZIO 5 (**punti 5**):

Un'azienda produce resistori con una produzione giornaliera di 1000 pezzi. Se un resistore è in perfette condizioni supera sempre il collaudo, nel 5% dei casi.
Sapendo che l'1% dei resistori prodotti è difettoso:

a) si calcoli la percentuale probabile di resistori che superano il collaudo giornaliero;

b) calcolare la percentuale di resistori difettosi nel lotto dei resistori che superano il collaudo.

SOLUZIONE:

a) 99.05% ;   b) $\simeq$ 0.05% .

ESERCIZIO 6 (**punti 5**):

Sia $f_{XY}(x,y)$ una funzione di densità congiunta di due v.a. X, Y, definita:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxe^y, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) Calcolare il valore di k;

b) dimostrare che X e Y son due v.a. indipendenti;

c) calcolare la probabilità che $X + Y < 1$.

SOLUZIONE:

a) $k = \frac{2}{e-1}$;

b) le due v.a. sono indipendenti.

c) $\mathbb{P}(X + Y < 1) = \dfrac{2e-5}{e-1} \simeq 0.254.$