

C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA SCRITTA

8/07/2016

COGNOME:

NOME:

N. matricola:

Prova orale:

ESERCIZIO 1 (punti 5):

Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$y' = \frac{2x^3 + x}{2y^3 + y}, \quad y(1) = 2.$$

SOLUZIONE:

$$y^4 + y^2 = x^4 + x^2 + 18 .$$

ESERCIZIO 2 (punti 5):

Calcolare con il metodo di variazione delle costanti la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' - y = \sin^2 x .$$

SOLUZIONE:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{5} \sin^2 x - \frac{2}{5} .$$

ESERCIZIO 3 (punti 5):

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - x, \quad x \in [-1, 1].$$

e se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier reale.

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x \\ &+ \frac{e^2 - 1}{e} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^{n+1}}{1 + n^2\pi^2} \sin n\pi x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4 (punti 5):

Dieci pezzi, di un lotto di 120 sono sottoposti ad un test di funzionamento. Sapendo che, per esperienza, si prevede che un 5% dei pezzi sia difettoso

- a) si calcoli la probabilità che i 10 pezzi siano tutti funzionanti;
- b) supponendo che i primi 10 pezzi siano risultati tutti funzionanti, se ne estraggono altri 20 per ripetere il test. Si calcoli la probabilità che anche questi ultimi risultino tutti funzionanti.

SOLUZIONE:

Sia X la v.a. che conta il numero di pezzi non funzionanti. Avremo:

$$a) \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{6}{0} \binom{114}{10}}{\binom{120}{10}} \simeq 58,64\% ;$$

$$b) \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{6}{0} \binom{104}{20}}{\binom{110}{10}} \simeq 29,07\% .$$

ESERCIZIO 5 (punti 5):

Sia X una v.a. normale di valore atteso μ noto ($\mu = 3$) e varianza σ_X^2 incognita, $X \sim \mathcal{N}(3, \sigma_X^2)$. È noto però che $\mathbb{P}(2,98 \leq X \leq 3,02) = 0.94$. Si calcoli la deviazione standard della X .

SOLUZIONE:

$$\sigma_X = 0,106 .$$

ESERCIZIO 6 (punti 5):

Una v.a. bidimensionale (X, Y) è uniformemente distribuita nel triangolo $D = \{x \geq 0, y \geq 0 : x + y \leq 2\}$.

a) Calcolare la densità di probabilità congiunta.

b) Calcolare le densità marginali di entrambe le componenti e la probabilità $\mathbb{P}(0 \leq X^2 + Y^2 \leq 1)$.

SOLUZIONE:

$$a) f_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \forall x, y \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$b) f_X(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad f_Y(y) = 1 - \frac{y}{2}, \quad \mathbb{P}(0 \leq X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{8}.$$

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

z	Seconda cifra decimale di z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1 - \Phi(z)]$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001