C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA PARZIALE di PROBABILITÀ
13/11/2018

COGNOME:
NOME:
N. matricola:

ESERCIZIO 1 (**punti 10**):
Consideriamo la seguente densità di probabilità per la v.a. X:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^{k-1}\,, & x \in [0,1]\,, k > 0, \\ \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Si chiede:
a) controllare se la $f_X(x)$ sia correttamente definita per ogni k;
b) calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$;
c) calcolare $\mathbb{P}[X \leq x | X \geq \frac{1}{2}]$.

SOLUZIONE:

a) la $f_X(x)$ è non negativa ($f_X(x) \geq 0, \forall k \geq 0, \forall x \in [0,1]$); inoltre $\int_0^1 kx^{k-1}dx = 1 \quad \forall k$, quindi la $f_X(x)$ è una corretta densità di probabilità;

b) $\mu_X = \mathbb{E}[X] = k\int_0^1 x^k dx = \frac{k}{k+1}$
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2 = k\int_0^1 x^{k+1}dx - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{k}{k+2} - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{k}{(k+2)(k+1)^2}$;

c) calcoliamo prima la funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0 \\ \\ x^k\,, & x \in [0,1] \\ \\ 1\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Poiché $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$, avremo per $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}(X \leq x | X \geq \frac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}\left((X \leq x) \cap (X \geq \frac{1}{2})\right)}{\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})} = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1)\right)}{1 - \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})} = \frac{F_X(x) - F_X(\frac{1}{2})}{1 - F_X(\frac{1}{2})} = \frac{x^k - 2^{-k}}{1 - 2^{-k}}\,.$$

e

$$\mathbb{P}(X \leq x | X \geq \frac{1}{2}) = 1\,, \quad \forall x > 1\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti 10**):

Sappiamo che la v.a. X segue una legge esponenziale di parametro λ, i.e. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ e che $\mathbb{P}(X \leq 15) = 0.35$. Si chiede di calcolare: a) λ, b) $\mathbb{P}(X > 30)$ e c) $\mathbb{P}(40 \leq X \leq 50)$.

SOLUZIONE:

La densità di probabilità della distribuzione esponenziale è

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

e la sua funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Quindi

a) da $\mathbb{P}(X \leq 15) = 0.35$, segue $F_X(15) = 1 - e^{-15\lambda} = 0.35$ e $e^{-15\lambda} = 0.65$ e $\lambda = -\frac{\ln(0.65)}{15} \simeq 0.029$

b) $\mathbb{P}(X > 30) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 30) = 1 - F_X(30) = e^{-30 \cdot 0.029} \simeq 0.42\,;$

c) $\mathbb{P}(40 \leq X \leq 50) = F_X(50) - F_X(40) = e^{-40 \cdot 0.029} - e^{-50 \cdot 0.029} \simeq e^{-1.16} - e^{-1.45} \simeq 0.31 - 0.23 = 0.08\,.$

ESERCIZIO 3 (**punti 10**):
Una v.a. X segue una legge normale di media 12 e varianza 16, $X \sim \mathcal{N}(12, 16)$. Calcolare: a) $\mathbb{P}(X \leq 15)$, b) $\mathbb{P}(X \geq 7)$ e c) $\mathbb{P}(8 \leq X \leq 17)$.

SOLUZIONE:

La relazione fra la v.a. X e la v.a. standardizzata Z è in questo caso $X = 4Z + 12$, quindi, utilizzando le tavole

a) $\mathbb{P}(X \leq 15) = \Phi(0.75) \simeq 0.77;$

b) $\mathbb{P}(X \geq 7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 7) = 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) \simeq 0.89;$

c) $\mathbb{P}(8 \leq X \leq 17) = \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq \frac{5}{4}) = \Phi(\frac{5}{4}) - \Phi(-1) \simeq 0.73\,.$