C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA PARZIALE di PROBABILITÀ
14/11/2017

ESERCIZIO 1 (**punti 10**):

Un'urna contiene 6 palline rosse e 4 bianche. Se ne straggono 3 senza reimmissione.
a) Qual è la probabilità di estrarne in successione una rossa e due bianche?
b) Qual è la probabilità di estrarne tre bianche?

SOLUZIONE:
a) Indicato con R_1 l'evento "la prima pallina è rossa", con B_2 l'evento "la seconda pallina è bianca" e con B_3 l'evento "la terza pallina è bianca".
Avremo

$$\mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(B_3|R_1 \cap B_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.1\,.$$

b) Indicato con B_1 l'evento "la prima pallina è bianca", con B_2 l'evento "la seconda pallina è bianca" e con B_3 l'evento "la terza pallina è bianca".
Avremo

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.033\,.$$

ESERCIZIO 2 (**punti10**):

I pacchetti di tè prodotti da un'azienda hanno un contenuto netto nominale di 250g. Il peso reale è una v.a. normale X di media 250g.
a) Calcolare la deviazione standard del peso, sapendo che il 5% dei pacchetti pesa di più di 252g;
b) calcolare la probabilità che un pacchetto pesi meno di 245g .

SOLUZIONE: i dati sono $\mu_X = 250g$ e $\mathbb{P}(X > 252) = 0.05$, quindi

a) $0.05 = 1 - \mathbb{P}(X \leq 252) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \mu + 2)\,.$

Di conseguenza, passando alla v.a. standardizzata:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{2}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma_X}\right) = 0.95\,.$$

Quindi, usando la tavola della normale standard per calcolare il quantile $z_{0.95}$, abbiamo

$$\frac{2}{\sigma_X} = z_{0.95} = 1.64\,.$$

Infine

$$\sigma_X = \frac{2}{z_{0.95}} = \frac{2}{1.64} \simeq 1.22\,.$$

b) Si chiede la probabilità $\mathbb{P}(X \leq 245)$; se sottraiamo la media μ_X ad entrambi i membri della disuguaglianza presente nell'argomento della misura di probabilità, avremo

$$\mathbb{P}(X-\mu_X) \leq -5) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \leq -\frac{5}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(-\frac{5}{1.22}\right) = \Phi(-4.10) = 1-\Phi(4.10) \simeq 0\,.$$

ESERCIZIO 3 (**punti 10**):

Una v.a. bidimensionale (X, Y) è distribuita nel dominio $D = \{x, y \geq 0,\ \text{t.c. } 0 \leq x \leq y^2 \leq 1\}$ secondo la seguente legge di densità di probabilità

$$f_{X,Y} = \begin{cases} kxy\,, & \forall x, y \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) calcolare il valore della costante k;

b) calcolare le densità marginali di entrambe le componenti X e Y e dire se le due v.a. sono indipendenti;

c) calcolare i valori attesi delle v.a. $U = XY$ e $V = \frac{X}{Y}$.

SOLUZIONE: la prima domanda richiede di integrare correttamente nel dominio in cui la densità non è identicamente nulla, cioè porre

$$1 = k\int_0^{+1}\left(\int_0^{y^2} xy\,dx\right)dy = k\int_0^{+1}\left(\int_{\sqrt{x}}^{1} xy\,dy\right)dx = \frac{k}{12}$$

e cioè

a) $k = 12\,$;

b) Per il calcolo delle densità marginali, avremo

$$f_X(x) = 12\int_{\sqrt{x}}^{1} xy\,dy = 6x(1-x)\,.$$

Per la $f_Y(y)$ avremo:

$$f_Y(y) = 12\int_0^{y^2} xy\,dx = 6y^5\,.$$

In conclusione le due v.a. non sono indipendenti.

c) Per il calcolo di $\mathbb{E}[U]$ e $\mathbb{E}[V]$ avremo:

$$\mathbb{E}[U] = 12 \int_0^{+1} \left(\int_0^{y^2} x^2 y^2 \, dx \right) dy = \frac{4}{9}\,;$$

$$\mathbb{E}[V] = 12 \int_0^{+1} \left(\int_0^{y^2} x^2 \, dx \right) dy = \frac{4}{7}\,.$$