C.d.L. in Ingegneria Elettronica e C.d.L. Ingegneria delle Telecomunicazioni
Corso di Metodi Matematici e Probabilistici

Prof. Giovanni Borgioli

PROVA PARZIALE di PROBABILITÀ
8/11/2016

ESERCIZIO 1 (**punti 10**):

Un'azienda assembla un macchinario con tre parti provenienti da tre diverse aziende, che indichiamo con A, B, e C. Il prodotto finale risulta difettoso se anche uno solo dei pezzi assemblati risulta difettoso. Si sa che i pezzi prodotti da A sono difettosi nel 5% dei casi, quelli prodotti da B nel 6% dei casi e quelli prodotti da C nel 3% dei casi. Indicato con D l'evento per cui il prodotto finale risulta difettoso, si chiede:

a) si calcoli la probabilità $\mathbb{P}(D)$ che il prodotto finale sia difettoso;

b) si calcoli la probabilità che il pezzo difettoso provenga dall'azienda A.

SOLUZIONE: il modo più semplice di risolvere la prima domanda è quello che porta a calcolare la probabilità che il macchinario funzioni. Per questo occorre che tutte e tre le componenti siano funzionanti. Quindi, indicati con A_f, B_f, C_f gli eventi che rappresentano l'arrivo di componenti funzionanti rispettivamente dalle aziende A, B, C. Indicato con F l'evento "il macchinario funziona" e con D l'evento "il macchinario non funziona", la probabilità $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(A_f \bigcap B_f \bigcap C_f) = 1 - \mathbb{P}(A_f)\mathbb{P}(B_f)\mathbb{P}(C_f)$ per l'indipendenza degli eventi.
Il calcolo puù essere anche svolto direttamente. Indicando con A_d, B_d, C_d gli eventi (indipendenti) per i quali i pezzi provenienti da A, B, C risultano difettosi, avremo che il macchinario risulta difettoso se anche uno solo di essi risulta difettoso, ovvero.

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A_d \bigcup B_d \bigcup C_d)$$

$$= \mathbb{P}(A_d) + \mathbb{P}(B_d) + \mathbb{P}(C_d) - \mathbb{P}(A_d)\mathbb{P}(B_d) - \mathbb{P}(A_d)\mathbb{P}(C_d) - \mathbb{P}(B_d)\mathbb{P}(C_d) + \mathbb{P}(A_d)\mathbb{P}(B_d)\mathbb{P}(C_d).$$

a) $\mathbb{P}(D) = 13.4\%$.

La seconda domanda si risolve con un'applicazione diretta della formula di Bayes, poiché conosciamo sia $\mathbb{P}(D|A_d) = 1$, che $\mathbb{P}(D) = 13.4\%$:

b) $\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A_d)\mathbb{P}(A_d)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{1 \cdot 0.05}{0.134} = 37.3\%$.

ESERCIZIO 2 (**punti 10**):

Sia X una v.a. normale di valore atteso e varianza noti, $\mu_X = 2$, $\sigma_X^2 = 9$, cioè $X \sim \mathcal{N}(2, 9)$.
Approssimando i risultati alla seconda cifra decimale, si calcoli

a) il valore di a per il quale $\mathbb{P}(X < a) = 0.80$;

b) si calcoli il valore di b per il quale $\mathbb{P}(1 < X < b) = 0.50$.

SOLUZIONE: si standardizza la v.a. normale

$$Z = \frac{X-2}{3} \iff X = 3Z + 2\,,$$

quindi

$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(3Z + 2 < a) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{a-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{a-2}{3}\right)\,,$$

dove Φ è la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard. Dalle tavole, approssimando alla seconda cifra decimale, abbiamo

$$\Phi\left(\frac{a-2}{3}\right) = 0.80 \iff \frac{a-2}{3} = z_{0.80} \backsimeq 0.85\,.$$

In conclusione,

a) $a \backsimeq 2 + 3 \cdot 0.85 = 4.55$.

Per la seconda domanda il procedimento è analogo:

$$\mathbb{P}(1 < X < b) = \mathbb{P}(1 < 3Z+2 < b) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{b-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{b-2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)\,.$$

Ma

$$\Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \backsimeq 1 - \Phi(0.33)\,.$$

Dalle tavole

$$1 - \Phi(0.33) = 1 - z_{0.33} \backsimeq 1 - 0.63 = 0.37\,.$$

Quindi deve essere

$$\Phi\left(\frac{b-2}{3}\right) - 0.37 = 0.50 \iff \Phi\left(\frac{b-2}{3}\right) = 0.87 \iff \frac{b-2}{3} = z_{0.87} \backsimeq 1.13\,.$$

In conclusione

b) $b = 3z_{0.87} + 2 = 5.39\,.$

ESERCIZIO 3 (**punti 10**):

Una v.a. bidimensionale (X,Y) è distribuita nel dominio $D = \{0 \leq y \leq x^2 \leq 1\}$ secondo la seguente legge di densità di probabilità

$$f_{X,Y} = \begin{cases} kx\sqrt{y}\,, & \forall x, y \in D \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede:

a) calcolare il valore della costante k;

b) calcolare le densità marginali di entrambe le componenti X e Y e dire se le due v.a. sono indipendenti;

c) calcolare i valori attesi μ_X , μ_Y e $\mu_{X,Y}$.

SOLUZIONE: la prima domanda richiede di integrare correttamente nel dominio in cui la densità non è identicamente nulla, cioè porre

$$1 = k \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{x^2} x\sqrt{y}\, dxdy = \frac{4}{15}k$$

e cioè

a) $k = \frac{15}{4}$;

Per il calcolo delle densità marginali, avremo

$$f_X(x) = \frac{15}{4} \int_{0}^{x^2} x\sqrt{y}\, dy = \frac{5}{2}x^4\,.$$

Per la $f_Y(y)$ dobbiamo considerare che il dominio D può essere scritto come $D = \{0 \leq \sqrt{y} \leq |x| \leq 1\}$, che per $x > 0$ corrisponde a $D_1 = \{0 \leq \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$, e per $x < 0$ corrisponde a $D_2 = \{0 \leq \sqrt{y} \leq -x \leq 1\}$, $(D = D_1 \bigcup D_2)$. Quindi avremo:

$$f_Y(y) = \frac{15}{4} \int_{\sqrt{y}}^{1} |x|\sqrt{y}\, dx = \frac{15}{4} \left\{ \int_{\sqrt{y}}^{1} x\sqrt{y}\, dx + \int_{\sqrt{y}}^{1} (-x)\sqrt{y}\, d(-x) \right\} = \frac{15}{2} \int_{\sqrt{y}}^{1} x\sqrt{y}\, dx\,.$$

In conclusione

b) $f_X(x) = \frac{5}{2}x^4$, $\quad f_Y(y) = \frac{15}{4}\sqrt{y}(1-y)$ $\quad$; le due v.a. non sono indipendenti;

Per il calcolo delle medie avremo

$$\mu_X = \int_{-1}^{+1} x f_X(x)\, dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} x^5\, dx = 0\,.$$

$$\mu_Y = \int_0^{+1} y f_Y(y)\, dy = \frac{15}{4} \int_0^{+1} y^{\frac{3}{2}} (1-y)\, dy = \frac{3}{7}\,.$$

$$\mu_{X,Y} = \frac{15}{4} \int\int_D xy f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = \frac{15}{4} \int_{-1}^{+1} \int_0^{x^2} x^2 y^{\frac{3}{2}}\, dxdy = 0\,.$$

In conclusione

c) $\mu_X = 0 \quad , \mu_Y = \frac{3}{7} \quad$ e $\mu_{X,Y} = 0 \quad .$

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ t^2}\, dt$$

	Seconda cifra decimale di z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1-\Phi(z)]$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001