

Giovanni Borgioli

**MODELLI
MATEMATICI
DI EVOLUZIONE
ED EQUAZIONI
DIFFERENZIALI**

QUADERNI DI MATEMATICA PER LE SCIENZE APPLICATE/2

Q **Celid**

CAPITOLO 1 MODELLI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

1.1 Oscillatore armonico

Consideriamo il modello matematico più semplice che sia utilizzabile per descrivere fenomeni di tipo periodico; si tratta di un sistema unidimensionale, lineare e conservativo. Questo sistema idealizzato può essere rappresentato da un sistema meccanico costituito da una massa m che si muove orizzontalmente su una guida liscia sotto l'azione di una molla di costante elastica k (Fig.1.1). Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio la molla approssima una forza elastica di richiamo, cioè una forza proporzionale allo spostamento. Se trascuriamo la resistenza dell'aria e l'attrito interno della molla l'equazione di moto della massa è:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

dove x rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Ponendo $k/m = \omega^2$ si ottiene l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad (1.1)$$

L'equazione costituisce un caso particolarmente semplice di **equazione lineare del II ordine, a coefficienti costanti** (e quindi si tratta di un'equazione autonoma), **omogenea**.

Il corrispondente modello elettrico è costituito da un semplice circuito di capacità C ed induttanza L , in cui viene trascurata l'energia dissipata, la non linearità degli elementi ed il fatto che induttanza e capacità siano caratteristiche distribuite (Fig.1.2).

In questo caso l'equazione di "evoluzione" per la carica Q presente sul condensatore è:

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0,$$

e, con $1/LC = \omega^2$, $Q = x$, si ottiene ancora la (1.1).

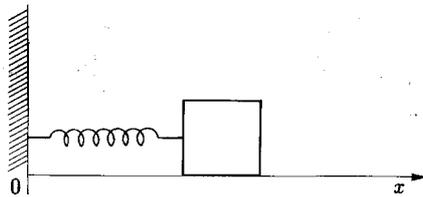


Fig.1.1

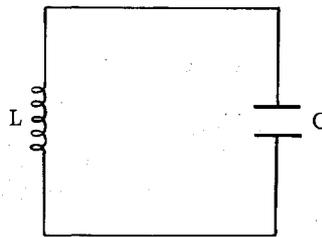


Fig.1.2

1.1.1 Soluzione esatta

La forma generale della soluzione può essere scritta nei seguenti modi:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t; \quad (1.2)$$

$$x(t) = A_1\cos(\omega t + \gamma_1); \quad (1.3)$$

$$x(t) = A_2\sin(\omega t + \gamma_2), \quad (1.4)$$

dove:

$$A_1\cos\gamma_1 = A_2\sin\gamma_2 = A,$$

$$-A_1\sin\gamma_1 = A_2\cos\gamma_2 = B.$$

$|A_1| = |A_2| = \sqrt{A^2 + B^2}$ è detta **ampiezza dell'oscillazione**, γ_1 è la **fase iniziale** ($\gamma_2 = \gamma_1 + \pi/2$). ω è la **pulsazione** e costituisce la caratteristica fondamentale del sistema oscillante, non dipendendo dalle condizioni iniziali. Il **periodo** T è legato alla pulsazione dalla relazione $T = 2\pi/\omega$ e $\nu = \omega/2\pi$ è la **frequenza**. Osserviamo anche che la funzione che rappresenta la soluzione x ha lo stesso periodo di quella che rappresenta \dot{x} , ma che x ed \dot{x} risultano fra loro in

quadratura di fase (cioè con uno sfasamento di $\pi/2$). Ad esempio, utilizzando la (1.3), si ha:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \gamma_1), \quad \dot{x}(t) = -A_1 \omega \sin(\omega t + \gamma_1), \quad (1.5)$$

La soluzione generale di (1.1) può essere scritta anche per mezzo delle funzioni esponenziali complesse, in accordo con il metodo generale per ottenere l'espressione analitica delle soluzioni di equazioni ordinarie, lineari, omogenee, a coefficienti costanti:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (1.6)$$

dove:

$$C_1 = \frac{A - iB}{2}, \quad C_2 = \frac{A + iB}{2}.$$

L'introduzione delle condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1.7)$$

permette di formulare il problema di Cauchy (1.1) + (1.7) che ammette come unica soluzione:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.8)$$

Indicheremo qui, e nel seguito, il problema di Cauchy ai valori iniziali con la sigla **PVI**.

1.1.2 Analisi qualitativa dell' oscillatore armonico

Consideriamo adesso la rappresentazione delle orbite nel piano delle fasi (x, \dot{x}) . La forma delle orbite può essere ottenuta eliminando il tempo fra le funzioni che descrivono le soluzioni, utilizzando, ad esempio la (1.5), oppure, integrando direttamente per quadrature l'equazione (1.1). Moltiplichiamo ambo i membri di (1.1) per \dot{x} :

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 \dot{x}x = 0,$$

e, successivamente, integriamo:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = C. \quad (1.9)$$

$C = \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2$ è una costante proporzionale all'energia totale del sistema. Variando le condizioni iniziali in modo da variare C , si ottiene una famiglia di **ellissi** omotetiche (Fig.1.3), che riempiono tutto il piano. Scrivendo in forma canonica la (1.9):

$$\frac{\dot{x}^2}{C} + \frac{x^2}{C/\omega^2} = 1,$$

si ottengono le lunghezze dei semiassi sugli assi x e \dot{x} (rispettivamente $\sqrt{C/\omega^2}$ e \sqrt{C}) e si può notare come la forma delle ellissi sia unicamente determinata dal parametro ω . Le orbite in figura sono percorse secondo il verso imposto dalla "freccia temporale": x è crescente nel semipiano $\dot{x} > 0$, decrescente nel semipiano $\dot{x} < 0$.

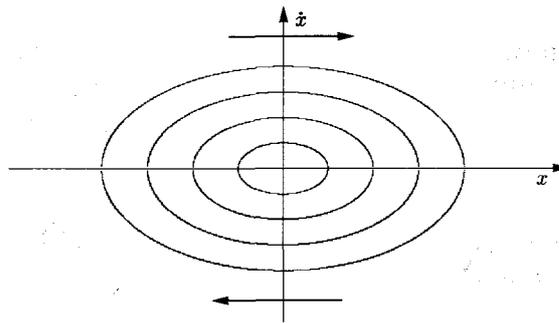


Fig.1.3

L'origine $(0,0)$ nel piano delle fasi è l'unica soluzione stazionaria per l'equazione (1.1). Tale soluzione è, inoltre, chiaramente stabile (si veda il Cap.6). Il punto $(0,0)$ prende il nome di "centro".

1.2. L'equazione lineare del punto sella

Consideriamo un pendolo matematico vincolato mediante un'asta rigida di massa trascurabile (Fig.1.4). Per determinare la configurazione del sistema, scegliamo come coordinata l'angolo φ formato dall'asta con la verticale ascendente.

Introducendo l'energia cinetica $T = 1/2 m \ell^2 \dot{\varphi}^2$ e l'energia potenziale

$U = mgl\cos\varphi$, con le ipotesi di vincoli lisci e di resistenza del mezzo trascurabile, si può ricorrere al teorema di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi = E ,$$

e, per derivazione, ottenere l'equazione di moto:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0 . \quad (1.10)$$

Poichè $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio, può essere interessante procedere in modo analogo al caso delle "piccole oscillazioni", linearizzando la (1.10):

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{\ell} \varphi = 0 , \quad (1.11)$$

e sostituendola con la (1.11) per valori di φ "piccoli" .

1.2.1 Soluzione esatta

Consideriamo adesso un punto materiale di massa m , soggetto ad un campo di forza centrifugo; se x rappresenta la distanza del punto dall'origine del campo, l'equazione di moto ha la forma:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x ,$$

che può essere riscritta come:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 . \quad (1.12)$$

Cerchiamo quindi la soluzione generale per equazioni del tipo della (1.12) (per $x = \varphi$ e $\omega^2 = g/\ell$ la (1.12) coincide con la (1.11)).

Consideriamo il polinomio associato alla (1.12):

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 ,$$

che ammette le soluzioni reali $\lambda_{1,2} = \pm \omega$.

La soluzione di (1.12) è quindi della forma:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} . \quad (1.13)$$

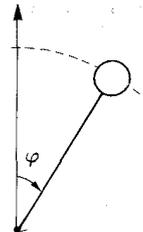


Fig.1.4

Per determinare la soluzione del PVI, assegnamo delle generiche condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0; \quad (1.14)$$

si determinano quindi i valori delle costanti arbitrarie:

$$A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\omega} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega} \right),$$

risolvendo così il PVI:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega} \right) e^{\omega t} + \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} \right]. \quad (1.15)$$

La soluzione (1.15) può essere riscritta nella forma seguente, spesso utile, che sottolinea l'analogia puramente "formale" con il PVI per l'oscillatore armonico:

$$x(t) = x_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t). \quad (1.16)$$

1.2.2 Analisi qualitativa

Se integriamo la (1.12) per quadrature, otteniamo immediatamente l'espressione dell'integrale primo che deve essere soddisfatto durante il moto:

$$\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 = C, \quad (1.17)$$

dove C è una costante proporzionale all'energia totale del sistema, determinabile dalle condizioni iniziali. Al variare di C , ovvero al variare delle condizioni iniziali, la (1.17) descrive una famiglia di **iperboli** nel piano (x, \dot{x}) , (Fig.1.5):

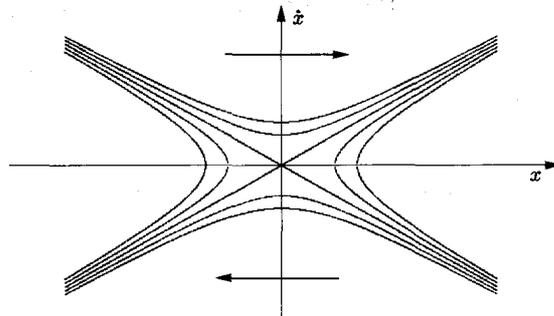


Fig.1.5

Fissare le condizioni iniziali significa determinare il ramo di iperbole che descrive il moto; l'evoluzione del sistema avverrà dalla parte indicata dalla "freccia del tempo". Per $C = 0$, e quindi per particolari condizioni iniziali, la (1.17) è equivalente alle equazioni delle rette:

$$\dot{x} = \omega x, \quad \dot{x} = -\omega x,$$

che costituiscono gli asintoti della famiglia di iperboli (1.17) e che rappresentano quindi delle orbite particolari per il sistema. Tutte le orbite sono curve aperte, sulle quali non si mantengono limitati, per $t \rightarrow +\infty$, né x né \dot{x} .

Anche i rami degli asintoti che il sistema descrive in verso "centripeto", tendendo cioè alla posizione di equilibrio $(0,0)$, non sono mai completamente percorsi in tempi finiti: questo significa che la tendenza all'equilibrio è asintotica.

Nota: l'equazione (1.12) è autonoma, quindi le orbite nel piano delle fasi (x, \dot{x}) non possono intersecarsi, secondo quanto prescrive il teorema di unicità, e possono incontrarsi solo in un punto di equilibrio (orbita degenere), dove l'orbita (ed il moto corrispondente) ha termine. Tuttavia, contrariamente al caso dell'oscillatore armonico, poichè le soluzioni $(x(t), \dot{x}(t))$ e le orbite corrispondenti non si mantengono limitate, il piano (x, \dot{x}) non è completamente rappresentativo del comportamento del sistema. In particolare può sembrare che le orbite provenienti da certe regioni tendano asintoticamente ad avvicinarsi per $t \rightarrow +\infty$. Questa impressione è contraddetta dall'instabilità della soluzione di equilibrio $(0,0)$ e quindi, per la linearità della (1.12), dall'instabilità rispetto alle condizioni iniziali di ogni soluzione dell'equazione (vedere §6.3 e §6.4).

L'apparente contraddizione sta nel fatto che il comportamento globale delle soluzioni può essere completamente osservato solo se si aggiunge l'asse del tempo ortogonalmente al piano (x, \dot{x}) , ovvero se si studiano le traiettorie corrispondenti alle soluzioni dell'equazione nello spazio delle fasi esteso (x, \dot{x}, t) . In questo caso, più difficile da visualizzare, si potrebbe vedere che le traiettorie, corrispondenti ad orbite che nel piano delle fasi (x, \dot{x}) si avvicinano asintoticamente (e che costituiscono la loro proiezione sul piano), in realtà divergono esponenzialmente lungo la direzione parallela all'asse del tempo.

Il punto $(0,0)$ prende il nome di "punto sella".

1.3 Oscillatore armonico con smorzamento lineare

Il modello matematico che viene qui presentato rappresenta una semplice "perturbazione" del modello conservativo dell'oscillatore armonico (§1.1), in cui si tiene conto della presenza di un effetto dissipativo, durante l'evoluzione del sistema, dovuto ad un termine di tipo lineare. L'esempio meccanico più semplice è quello di una massa m in moto traslatorio, sottoposta ad un campo di forze elastiche (Fig.1.1) e ad una forza di resistenza viscosa dovuta al mezzo attraversato (ad es. l'aria). In questo caso l'equazione di moto assume la forma:

$$m\mathbf{a} = -k\mathbf{r} - b\mathbf{v};$$

dove \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} sono, rispettivamente, i vettori posizione, velocità ed accelerazione e k , b , rispettivamente, la costante elastica ed il coefficiente di viscosità.

Scomponendo l'equazione vettoriale in un riferimento cartesiano ortogonale si ottengono tre equazioni scalari indipendenti del tipo:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (1.18)$$

La (1.18) rappresenta la componente lungo l'asse x dell'equazione vettoriale; le altre componenti possono essere ottenute semplicemente sostituendo alla x le coordinate y e z . Ponendo $2h = b/m$ e $\omega^2 = k/m$ si ottiene la forma:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.19)$$

di cui studieremo nel seguito le soluzioni e le loro proprietà.

Un esempio elettrico è invece fornito da un circuito di tipo RLC, a componenti lineari concentrate, (Fig.1.6) in cui l'equazione di evoluzione per la carica Q è:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0,$$

dove, con $Q = x$, $R/L = 2h$, $1/LC = \omega^2$ si ottiene ancora la (1.19).

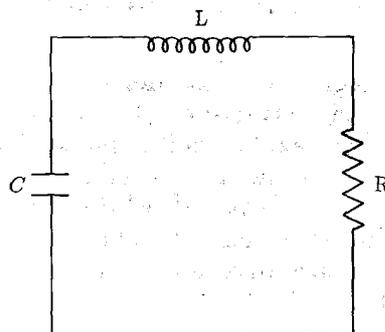


Fig.1.6

In ogni caso la (1.19) può rappresentare la prima approssimazione (approssimazione lineare) per un qualunque sistema vibrante in modo unidimensionale rispetto ad una "configurazione" di equilibrio stabile, in cui si debba tenere conto anche di effetti dissipativi.

1.3.1 Soluzione esatta

Utilizzando il metodo generale per la ricerca delle soluzioni delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione per il polinomio caratteristico associato alla (1.19):

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0,$$

che ha soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Per $h \neq \omega$, la forma generale della soluzione della (1.19) è:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad (1.20)$$

dove A e B sono costanti reali o complesse coniugate arbitrarie e λ_1, λ_2 assumono valori reali o complessi coniugati a secondo che sia $h > \omega$ oppure $h < \omega$. Se $h = \omega$, la forma generale della soluzione è:

$$x(t) = Ce^{-ht} + Dte^{-ht}, \quad (1.21)$$

dove C e D sono costanti reali arbitrarie. Non discuteremo nel seguito il caso della (1.21) perché il comportamento qualitativo della soluzione non è significativamente diverso dalla situazione in cui $h > \omega$. Ci limiteremo perciò alle situazioni di smorzamento "debole" e "forte".

1.3.2 Oscillatore armonico "debolmente" smorzato

Questo è il caso in cui il termine "elastico" prevale sullo smorzamento, ovvero $h < \omega$. Se poniamo $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, otteniamo $\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega_1$ e, sostituendo nella (1.20):

$$x(t) = e^{-ht} (Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}).$$

Ricorrendo alle formule di Eulero, si può scrivere la soluzione per mezzo di funzioni reali, ad esempio:

$$x(t) = A_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (1.22)$$

dove A_1 ed α , che rappresenta la fase iniziale, sono le due nuove costanti arbitrarie; quindi, per $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -A_1 e^{-ht} [h \cos(\omega_1 t + \alpha) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha)]. \quad (1.23)$$

La (1.23) è fattorizzata in due funzioni: una periodica e l'altra monotona decrescente; $x(t)$ ha quindi alcune caratteristiche periodiche, come il ripetersi dei massimi e minimi relativi (ogni $T_1 = 2\pi/\omega_1$) e degli zeri (ogni $T_1/2$), ma i valori assunti non si ripetono e decadono esponenzialmente (Fig.1.7):

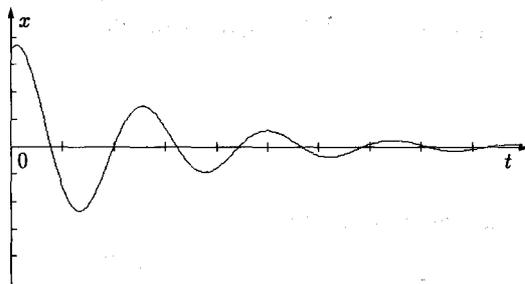


Fig.1.7

Una misura di questo decadimento è fornita dal decremento logaritmico d :

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = hT_1,$$

un numero puro e, quindi, un parametro indipendente dalla scelta dell'unità di misura per il tempo. La curva $z = A_1 e^{-hT_1}$ è l'involuppo della soluzione $x(t)$. Si noti che $\omega_1 < \omega$ e quindi che T_1 risulta maggiore del corrispondente periodo dell'oscillatore armonico conservativo; T_1 cresce al crescere di h e tende ad infinito per $h \rightarrow \omega$, quando viene perduta ogni caratteristica di periodicità. La presenza del termine di smorzamento modifica anche la relazione di fase fra x ed \dot{x} , che può essere determinata riscrivendo opportunamente la (1.23):

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega e^{-ht} \left[\frac{h}{\omega} \cos(\omega_1 t + \alpha) + \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\omega_1 t + \alpha) \right].$$

Ricordando che $\omega^2 = h^2 + \omega_1^2$, si può porre:

$$\frac{h}{\omega} = \sin\beta, \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \cos\beta,$$

ed ottenere per la (1.23) la forma:

$$\dot{x}(t) = -A_1\omega e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \beta); \quad (1.24)$$

si può così osservare che le fasi dei fattori periodici in (1.22) e (1.24) non sono in quadratura come nel caso conservativo (1.5), ma si manifesta la presenza di una fase aggiuntiva, β , dovuta allo smorzamento.

1.3.3 Analisi qualitativa: caso "debolmente" smorzato

Per analizzare le orbite descritte nel piano delle fasi dalle soluzioni (1.22), (1.23) è comodo introdurre una nuova coppia di coordinate (u, v) , per mezzo della seguente trasformazione lineare, invertibile, [1]:

$$\begin{cases} u = \omega_1 x \\ v = hx + \dot{x} \end{cases}; \quad (1.25)$$

nel nuovo piano delle fasi (u, v) le soluzioni assumono la forma:

$$u(t) = A_1\omega_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad v(t) = -A_1\omega_1 e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha);$$

passando alle coordinate polari:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \varphi = \omega_1 t,$$

si ottiene l'equazione per le orbite:

$$r = A_1\omega_1 e^{-\frac{h}{\omega_1}\varphi}. \quad (1.26)$$

L'equazione (1.26) descrive, al variare di A_1 , una famiglia di **spirali logaritmiche** nel piano (u, v) .

Tornando al piano delle fasi (x, \dot{x}) tramite l'inversa della trasformazione (1.25), la famiglia delle orbite viene "deformata", ma mantiene la caratteristica spiraliforme con la stessa origine (il punto $(0, 0)$ è invariante secondo la (1.25)), (Fig.1.8). Le orbite hanno un'infinità numerabile di intersezioni con gli assi, che

corrispondono ad “attraversamenti” dell’asse $x=0$, e ad annullamenti della velocità, o “arresti”, $\dot{x}=0$; questo descrive bene l’andamento di oscillazione smorzata della soluzione, che converge asintoticamente all’origine (estinzione del moto).

Si noti che, indicata con \mathbf{v} la velocità di fase, che è un vettore nel piano (x, \dot{x}) , si ha:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(1+4h^2)\dot{x}^2 + 4h\omega^2 x\dot{x} + \omega^4 x^2},$$

che si annulla solo nell’origine, unica soluzione stazionaria del problema.

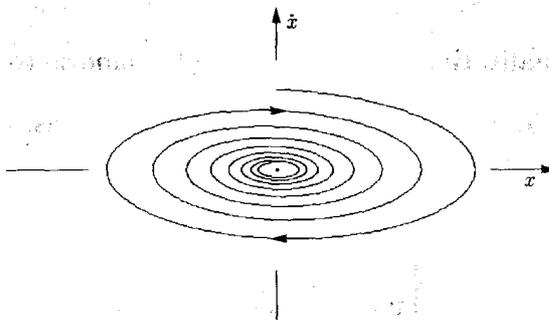


Fig.1.8

L’origine $(0,0)$ nel piano delle fasi (x, \dot{x}) (Fig.1.8) è l’unica soluzione stazionaria per l’equazione (3.2) ed è asintoticamente stabile. Il punto $(0,0)$ prende il nome di “spirale stabile” o “fuoco stabile”.

1.3.4 Oscillatore armonico “fortemente” smorzato

In questo caso il termine di smorzamento “prevale” su quello elastico, cioè $h > \omega$. Le radici dell’equazione algebrica associata all’equazione differenziale (1.19) sono entrambe reali e, se poniamo:

$$q_1 = -\lambda_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad q_2 = -\lambda_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

avremo $q_2 > q_1 > 0$ e la forma generale della soluzione sarà:

$$x(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (1.27)$$

Cerchiamo di interpretare il comportamento della (1.27) in dipendenza dalla scelta dei dati iniziali, [1]:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.28)$$

Determinando le costanti arbitrarie in (1.27), si ottiene:

$$x(t) = \frac{v_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} - \frac{v_0 + q_1 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t}, \quad (1.29)$$

$$\dot{x}(t) = -q_1 \frac{v_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + q_2 \frac{v_0 + q_1 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t}. \quad (1.30)$$

Vediamo se esiste un tempo $t_1 > 0$, finito, per cui il sistema attraversa l'asse $x = 0$ ed un tempo $t_2 > 0$, finito, in cui il sistema annulla la propria velocità ($\dot{x} = 0$). Tali tempi esistono se le seguenti equazioni ammettono soluzione:

$$x = 0 \Rightarrow e^{(q_2 - q_1)t_1} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{v_0 + q_2 x_0}, \quad (1.31)$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow e^{(q_2 - q_1)t_2} = 1 + \frac{v_0(q_2 - q_1)}{q_1(v_0 + q_2 x_0)}; \quad (1.32)$$

ricordando che $q_2 > q_1$, l'esponenziale in (1.31) e (1.32) è una funzione monotona crescente, sempre maggiore di 1 per tempi positivi. Quindi, la (1.31) ammette un'unica soluzione se e solo se:

$$\frac{x_0}{v_0 + q_2 x_0} < 0,$$

e la (1.32), analogamente, se e solo se:

$$\frac{v_0}{v_0 + q_2 x_0} > 0.$$

Possiamo sintetizzare il diverso andamento delle soluzioni, al variare delle condizioni iniziali, suddividendo il piano (x_0, v_0) , rappresentativo di ogni possibile scelta delle condizioni stesse, in tre regioni (Fig.1.9):

i) le soluzioni provenienti dalla regione I subiscono un "arresto" ($\dot{x} = 0$), ma non attraversano l'asse $x = 0$ (vedi Fig.1.10 per l'andamento temporale della $x(t)$ corrispondente);

ii) le soluzioni provenienti dalla regione II non subiscono "arresti" né attraversano l'asse $x = 0$, ma tendono direttamente a zero, (Fig.1.11);

iii) le soluzioni provenienti dalla regione III subiscono un "arresto" ed un "attraversamento" dell'asse $x = 0$, prima di annullarsi asintoticamente, (Fig.1.12).

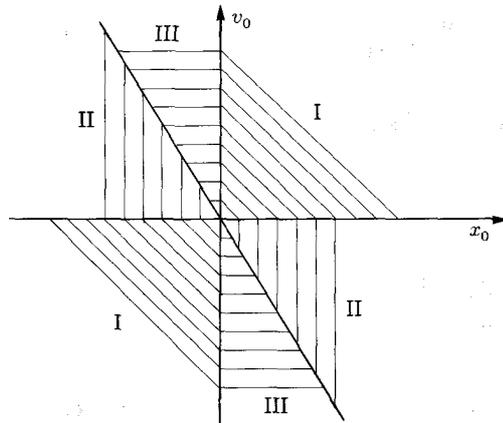


Fig.1.9

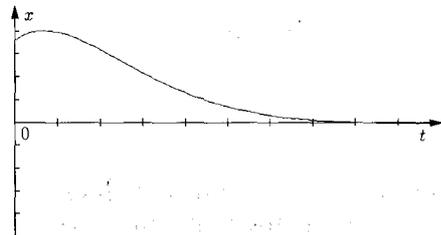


Fig.1.10

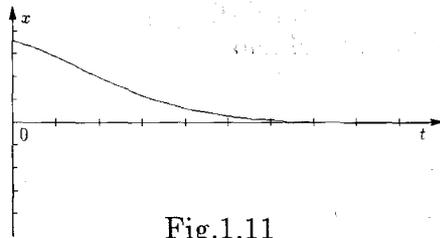


Fig.1.11

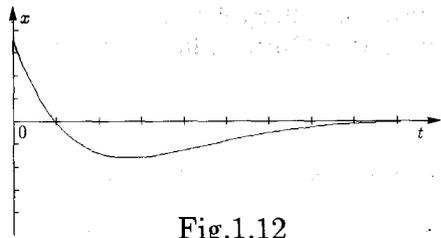


Fig.1.12