

Giovanni Borghioli

**MODELLI
MATEMATICI
DI EVOLUZIONE
ED EQUAZIONI
DIFFERENZIALI**

QUADERNI DI MATEMATICA PER LE SCIENZE APPLICATE/2

Q **Celid**

1.5. Oscillazioni forzate e risonanza lineare

Consideriamo adesso un sistema che sia caratterizzabile come un oscillatore armonico smorzato, la cui evoluzione sia quindi guidata da un'equazione del tipo della (1.19). Supponiamo che sul sistema sia applicata un'azione esterna, indipendente dallo stato del sistema stesso, rappresentabile attraverso una funzione nota del tempo $f(t)$. L'equazione di evoluzione assume la forma:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t) . \quad (1.43)$$

Se il problema è di carattere meccanico, si può pensare all'azione di una forza esterna su un sistema con caratteristiche elastiche, in cui si tenga conto anche di dissipazioni per viscosità del mezzo circostante.

Per problemi nell'ambito di circuiti RLC, si può pensare di aver applicato a due estremi del circuito un generatore di forza elettromotrice, in generale variabile in modo noto al variare del tempo, (Fig.1.26).

Nota: nella terminologia della teoria dei sistemi $f(t)$ viene definita come ingresso o "input" e la soluzione $x(t)$ prende il nome di risposta del sistema o uscita, oppure "output".

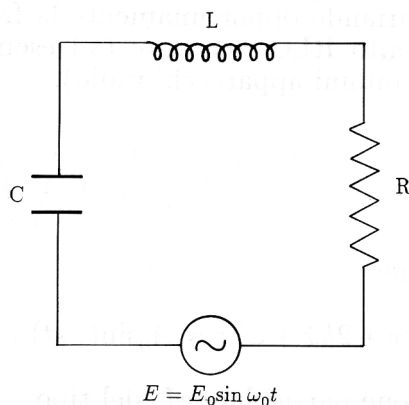


Fig.1.26

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari non omogenee, [3], è noto che la soluzione generale della (1.43) è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata $x_{om}(t)$ (data dalla (1.20), se $h \neq \omega$) più una soluzione particolare della equazione non omogenea (1.43), $x^*(t)$:

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t) . \quad (1.44)$$

e, quindi:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{om}(t) + \dot{x}^*(t) . \quad (1.45)$$

Dal comportamento asintotico della soluzione dell'equazione omogenea:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{om}(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}_{om}(t) = 0 ,$$

si deduce che x_{om} influenza x solo per un periodo "transitorio" e che il comportamento asintotico di x (e di $\dot{x}$) coincide con quello di x^* (e di $\dot{x}^*$).

Ci limiteremo, qui, a studiare il comportamento di $x^*(t)$ nel caso particolarmente interessante in cui $f(t)$ sia una funzione armonica del tempo, caso in cui può aver luogo, per particolari valori dei parametri presenti nell'equazione, il cosiddetto fenomeno della risonanza.

Per un'analisi più ampia del fenomeno fisico ed una dettagliata rassegna dei più noti episodi di carattere "catastrofico", rimandiamo al già citato [3, pp.167-170]. Ricordiamo, comunque, gli episodi dei crolli del ponte di Tacoma (Washington, USA, 1/7/1940), che fu anche documentato cinematograficamente, e del ponte di Broughton (Manchester, Inghilterra, 1831); per il versante "positivo" ricordiamo la possibilità di amplificare o di filtrare un segnale in arrivo, variando opportunamente la frequenza propria di oscillazione del circuito RLC ricevente (ad esempio variandone la capacità, come nei comuni apparecchi radio).

1.5.1 Risonanza

Studiamo l'equazione:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t) , \quad (1.46)$$

cercando una soluzione particolare x^* , del tipo:

$$x^*(t) = C \sin(\omega_0 t - \gamma) , \quad C > 0 , \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} . \quad (1.47)$$

Nota: lo studio dell'equazione (1.46), con il termine forzante di tipo armonico, ha interesse generale, in quanto ci si può ricondurre ad equazioni di questo tipo se si sviluppa in serie di Fourier la $f(t)$ nella (1.43).

Sostituendo in (1.46) ed avendo l'accortezza di utilizzare l'identità:

$$\begin{aligned} A_0 \sin(\omega_0 t) &= A_0 \sin[(\omega_0 t - \gamma) + \gamma] = \\ &= A_0 \sin(\omega_0 t - \gamma) \cos \gamma + A_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) \sin \gamma, \end{aligned}$$

si ottengono le seguenti equazioni, che devono essere soddisfatte dai parametri C e γ :

$$\begin{cases} 2C\omega_0 h = A_0 \sin \gamma \\ C(\omega^2 - \omega_0^2) = A_0 \cos \gamma \end{cases} ;$$

la soluzione x^* ha quindi ampiezza:

$$C = \frac{|A_0|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}}, \quad (1.48)$$

e fase γ , tale che:

$$\tan \gamma = \frac{2\omega_0 h}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1.49)$$

Per valori di ω_0 lontani da ω , la soluzione del problema esibisce un comportamento piuttosto complesso nel transitorio, per tendere poi, per tempi grandi, alla soluzione asintotica sinusoidale di periodo $2\pi/\omega_0$, (Fig.1.27).

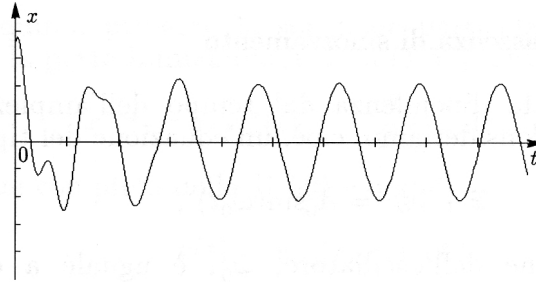


Fig.1.27

Valori della frequenza di oscillazione del termine forzante molto vicini alla frequenza di oscillazione propria del sistema ($\omega_0 \simeq \omega$) producono una soluzione asintotica in quadratura di fase con l'ingresso stesso ($\tan \gamma \rightarrow \infty$), (Fig.1.28).

L'ampiezza C , al variare di ω_0 e fissati ω ed h , è massima per $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - 2h^2}$ ed il suo valore cresce al diminuire del coefficiente di smorzamento h , (Fig.1.29), raggiungendo anche valori di

“rottura” per il sistema. La situazione limite, in cui $\omega_0 = \omega$, prende il nome di **risonanza** ed in questo caso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C = +\infty .$$

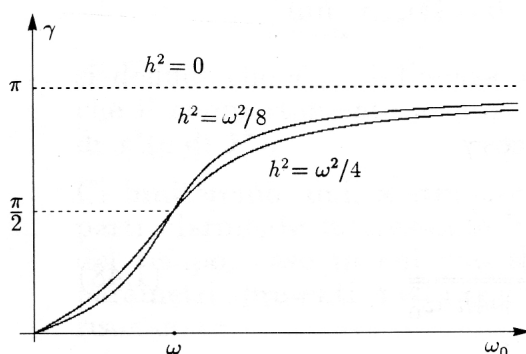


Fig.1.28

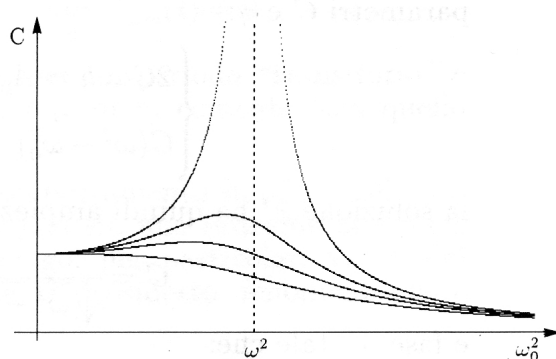


Fig.1.29

Si noti che il massimo dell'ampiezza C , al variare di ω e fissati ω_0 ed h , viene raggiunto per il valore $\omega = \omega_0$. Questo è, ad esempio, il caso dei circuiti lineari costruiti con caratteristiche L e C variabili.

1.5.2 Risonanza in assenza di smorzamento

Valutiamo adesso la dipendenza dal tempo dell'ampiezza C nel caso in cui $h = 0$. Consideriamo, cioè, un'equazione del tipo:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t) , \quad (1.50)$$

in cui la pulsazione dell'oscillatore, ω_0 , è uguale a quella del termine forzante sinusoidale.

Per calcolare la soluzione della (1.50) ricorreremo all'equazione complessa:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A_0 e^{i\omega_0 t} , \quad z = y + ix , \quad (1.51)$$

di cui la (1.50) costituisce la parte immaginaria. Per la linearità delle equazioni otterremo quindi la soluzione $x(t)$ come:

$$x(t) = \text{Im} z(t) . \quad (1.52)$$

Nota: Lo stesso risultato è facilmente ottenibile anche lavorando direttamente sulla sola equazione reale (1.50), cercando una soluzione particolare del tipo $x^*(t) = At \cos(\omega_0 t)$, ma si preferisce usare qui, come esercizio, la tecnica delle equazioni complesse, molto utilizzata nell'analisi dei circuiti oscillanti per la sua maggiore semplicità formale.

Tornando alla (1.51), cerchiamo una soluzione particolare $z^*(t)$ per l'equazione completa (non omogenea); poiché la funzione complessa $\exp(i\omega_0 t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1.51), proviamo la forma:

$$z^*(t) = Cte^{i\omega_0 t}; \quad (1.53)$$

calcolata la derivata seconda:

$$\ddot{z}^*(t) = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 C t e^{i\omega_0 t},$$

si ottiene facilmente:

$$\ddot{z}^* + \omega_0^2 z^* = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t}. \quad (1.54)$$

Confrontando la (1.54) con la (1.51), si ottiene il valore di C da introdurre nella (1.53):

$$C = -\frac{iA_0}{2\omega_0}.$$

Possiamo quindi ottenere la soluzione particolare x^* della (1.50), prendendo la parte immaginaria della (1.53), ovvero:

$$x^*(t) = \text{Im} z^*(t) = -\frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (1.55)$$

La soluzione completa della (1.50) è quindi:

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t),$$

dove, contrariamente al caso con smorzamento, la $x_{om}(t)$ non è più un termine "transitorio", ma rappresenta un'oscillazione armonica (limitata) permanente del sistema, cui si sovrappone il termine di oscillazione (in quadratura di fase con l'"ingresso") di ampiezza linearmente crescente nel tempo, dovuto alla risonanza con il termine forzante. In conclusione, ricordando la (1.2), avremo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (1.56)$$

CAPITOLO 2

SISTEMI NON LINEARI CONSERVATIVI

2.1 Il pendolo: integrazione per quadrature

Consideriamo, come primo esempio di tipo non lineare, il problema del moto di un pendolo ad asta rigida, (Fig.2.1).

Indicato con θ l'angolo che l'asta forma con la verticale, l'equazione di moto assume la forma ben nota:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad (2.1)$$

dove $\omega^2 = g/\ell$, g è l'accelerazione di gravità ed ℓ la lunghezza dell'asta. La trattazione del problema (2.1), che viene di solito svolta nei corsi di Fisica I, non va molto oltre il caso approssimato delle "piccole oscillazioni" attorno alla configurazione di equilibrio stabile $\theta = 0$, riconducendo la (2.1) al caso dell'oscillatore armonico (§ 1.1).

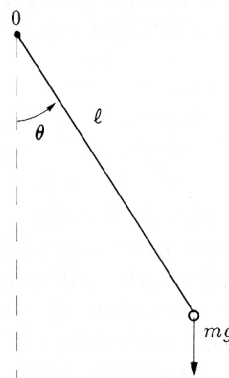


Fig.2.1

La ricerca di una soluzione esatta del problema non può essere svolta con i semplici metodi dei casi lineari, perché non esiste una formula generale per le soluzioni di equazioni non lineari e, nel caso della (2.1), tale soluzione non può essere espressa per mezzo di funzioni elementari.

Un metodo generale per tutti i problemi conservativi unidimensionali (applicabile quindi alla (2.1)) consiste nell'integrare per quadrature la (2.1), ottenendo l'espressione della conservazione dell'energia meccanica totale del sistema (per unità di momento di inerzia), E :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta = E ; \quad (2.2)$$

ponendo $-\omega^2 \cos \theta = U(\theta)$, energia potenziale del sistema, si ottiene l'espressione:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2(E - U(\theta))} , \quad (2.3)$$

dove si è considerata una restrizione del moto ad un "tratto" progressivo ($\dot{\theta} > 0$); per studiare "tratti" regressivi ($\dot{\theta} < 0$) occorre ovviamente scegliere per la (2.3) la radice col segno $-$ (meno). La (2.3) può essere integrata per separazioni di variabili; ponendo $t = 0$ come istante iniziale e $\theta(0) = \theta_0$, si ottiene:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E - U(\vartheta))}} . \quad (2.4)$$

La soluzione $\theta(t)$ della (2.1) può essere così ottenuta invertendo la (2.4), dopo aver calcolato per serie l'integrale che vi compare ed essersi arrestati all'ordine di approssimazione desiderato. Tale soluzione descrive il moto del pendolo a partire da condizioni iniziali che assicurino $\dot{\theta} > 0$; al primo istante t_1 in cui $\dot{\theta}(t_1) = 0$ la soluzione prodotta dalla (2.4) cessa di essere valida per descrivere il moto ed occorre "ripartire", per il moto con $\dot{\theta} < 0$, con la seguente:

$$t = - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E - U(\vartheta))}} , \quad (2.5)$$

dove $\theta_1 = \theta(t_1)$.

Si utilizzano, ovviamente, per il calcolo della soluzione di (2.1), molti metodi approssimati, messi a punto per lo studio delle equazioni non lineari, quali, fra gli altri, il metodo delle approssimazioni successive ed il metodo delle perturbazioni.

Su questi argomenti, sui quali non entreremo nel merito, può essere interessante consultare [16, pp.48-55 e 321-344].

2.2 Analisi qualitativa del pendolo non lineare

Cerchiamo di ottenere una rappresentazione delle orbite della (2.1) nel piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$, scegliendo una rappresentazione di tipo cartesiano.

Iniziamo osservando che vi sono infinite soluzioni stazionarie $(\theta^{(e)}, \dot{\theta}^{(e)})$ per l'equazione (6.1), tutte del tipo:

$$\begin{cases} \theta^{(e)} = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ \dot{\theta}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.1 Centri

L'equazione (2.2) fornisce una rappresentazione esatta e globale delle orbite nel piano delle fasi. Ne cerchiamo un'approssimazione nell'intorno delle soluzioni stazionarie per individuare le loro proprietà di stabilità e per ottenere una forma semplice "locale" della famiglia di curve descritta dalla (2.2). L'origine $(0,0)$ è stabile (vedere il Capitolo 6 e, in particolare l'Esempio (6.23)); in un suo intorno, possiamo approssimare la (2.2) ponendo:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad (2.7)$$

ed ottenendo:

$$\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = 2(E + \omega^2) = C_1, \quad (2.8)$$

che rappresenta una famiglia di ellissi omotetiche, come nella (1.9) per il caso dell'oscillatore armonico. L'origine del piano delle fasi è quindi un centro (Fig.1.3). Tale situazione si manifesta in ogni punto di coordinate $(2k\pi, 0)$, per la periodicità (con $T = 2\pi$) di $\cos\theta$.

2.2.2 Punti sella

Consideriamo adesso il punto $(\pi, 0)$, che corrisponde alla soluzione di equilibrio con quota più elevata. Operando il cambiamento di variabile:

$$\theta = \pi + \varphi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \varphi ,$$

ed approssimando $\cos \varphi$, per φ "vicini" a zero, allo stesso ordine scelto in (2.7), si ottiene per la (2.2):

$$\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \varphi^2 = 2(E - \omega^2) = C_2 , \quad (2.9)$$

che rappresenta in un intorno del punto $(\pi, 0)$, e relativamente ad un riferimento con origine nel punto stesso ed assi $\dot{\varphi} = 0$ (coincidente con l'asse $\theta = 0$) e $\varphi = 0$ (coincidente con la retta $\theta = \pi$), una famiglia di iperboli con asintoti di equazione:

$$\dot{\varphi} = \pm \omega \varphi .$$

Questa situazione corrisponde alla (1.17), che avevamo effettivamente ottenuto dall'approssimazione dell'equazione del pendolo (e non, come qui, approssimando la famiglia di integrali primi (2.2)) nelle vicinanze della posizione di equilibrio instabile.

Il punto $(\pi, 0)$ è quindi un punto sella e, per la periodicità, lo sono tutti i punti del tipo $((2k+1)\pi, 0)$ (Fig.1.5).

2.3 Ritratto di fase globale

Per un'analisi del comportamento globale delle orbite prodotte dalla (2.1) nel piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ riscriviamo la (2.2) nella forma seguente:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 \left(\frac{E}{\omega^2} + \cos \theta \right) . \quad (2.10)$$

Si può osservare che le curve definite dalla (2.10) sono simmetriche rispetto all'asse $\dot{\theta} = 0$; basterà quindi studiare la famiglia di orbite per $\dot{\theta} > 0$ ed ottenere tutte le altre per ribaltamento:

$$\dot{\theta} = 2\omega^2 \sqrt{\left(\frac{E}{\omega^2} + \cos \theta \right)} ; \quad (2.11)$$

la (2.11) ammette soluzioni reali solo per $E/\omega^2 \geq -1$; l'assunzione di tali valori dipende dalle condizioni iniziali, una volta che siano fissati i parametri g ed ℓ caratterizzanti il problema ($g/\ell = \omega^2$).

Consideriamo separatamente i vari casi che si determinano:

i) $E/\omega^2 = -1$:

a questo valore della costante E corrispondono come soluzione della (2.11) le orbite degeneri:

$$\theta = 2k\pi, \quad \dot{\theta} = 0,$$

che descrivono le soluzioni stazionarie stabili (centri) del problema (Fig.2.2).

ii) $-1 < E/\omega^2 < 1$:

poniamo $\cos\theta_{max} = -E/\omega^2$; possiamo riscrivere la (2.11) nella forma:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_{max})}; \quad (2.12)$$

consideriamo, per semplicità, l'intervallo $(-\pi, \pi)$ ed osserviamo che la (2.12) ammette soluzioni reali (e corrispondentemente orbite nel piano delle fasi) solo per:

$$-\theta_{max} < \theta < \theta_{max}, \quad -\pi < \theta_{max} < \pi.$$

Ciò significa che, in questo intervallo di valori assunti da E , le orbite sono curve limitate nella striscia $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$. La variazione corrispondente di $\dot{\theta}$ avviene nella striscia $[-\sqrt{2\omega^2(1 - \cos\theta_{max})}, \sqrt{2\omega^2(1 - \cos\theta_{max})}]$, che ci assicura che le orbite si mantengono in una regione limitata (in un rettangolo) del piano delle fasi.

Osservando, infine, che nella (2.12) $\dot{\theta} = 0$ solo per $\theta = -\theta_{max}$ e $\theta = \theta_{max}$ e ricordando la simmetria delle orbite rispetto all'asse $\dot{\theta} = 0$, si conclude che si tratta di curve chiuse, che descrivono quindi moti periodici. Per la periodicità ($T = 2\pi$) della (2.12), lo stesso comportamento delle orbite si ha in ogni intervallo:

$$(2k-1)\pi < \theta_{max} < (2k+1)\pi,$$

a partire dal suo centro, di coordinate $(2k\pi, 0)$, (Fig.2.2).

Le curve chiuse più "vicine" ai centri, cioè quelle di ampiezza piccola, sono approssimativamente di forma ellittica; al crescere

dell'ampiezza si deformano ed in vicinanza dei punti $((2k-1)\pi, 0)$ e $((2k+1)\pi, 0)$ sono approssimate dalle iperboli individuate dalla (2.9).

iii) $E/\omega^2 = 1$:

questo è il caso limite, che separa i valori di E per cui si hanno orbite chiuse (moti oscillatori periodici), da quelli per cui si hanno orbite aperte (moti rivolutivi "progressivi" o "regressivi", periodici solo per quanto riguarda i valori assunti da θ). Dalla ii) segue che $\theta_{max} = \pi$ e che $\dot{\theta} = 0$ solo per $\theta = \pi$ e $\theta = -\pi$. Il moto descritto parte quindi con condizioni iniziali (e quindi con il valore di E) che consentono di raggiungere, in un tempo infinito, la soluzione stazionaria instabile $(\pi, 0)$, nel caso di moto "progressivo" ($\dot{\theta} > 0$), oppure la soluzione stazionaria instabile $(-\pi, 0)$, nel caso "regressivo" ($\dot{\theta} < 0$). La curva completa corrispondente a questa situazione, disegnata in Fig.2.2 non rappresenta quindi un'unica orbita chiusa, come quelle descritte in ii), ma due diverse orbite che si incontrano in due punti, detti **orbite degeneri**, che rappresentano soluzioni stazionarie (o di equilibrio) instabili.

Le orbite descritte, che si presentano in ogni striscia $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, prendono il nome di **separatrici** e sono approssimate dagli asintoti della famiglia di iperboli (2.9) in vicinanza dei punti $((2k-1)\pi, 0)$ e $((2k+1)\pi, 0)$.

iv) $E/\omega^2 > 1$:

per questi valori di E (e quindi delle condizioni iniziali che li determinano) non ci sono più limitazioni sui valori assumibili da $\cos\theta$ nella (2.11). θ può assumere quindi ogni valore reale. Le orbite corrispondenti sono curve aperte, percorse in senso "progressivo" o "regressivo", a seconda del segno iniziale di $\dot{\theta}$. Nel semipiano $\dot{\theta} > 0$ tutte le curve presentano un massimo per $\theta = 2k\pi$ ed un minimo per $\theta = (2k+1)\pi$; i massimi ed i minimi sono più accentuati per E poco maggiore di ω^2 e tendono a "scompare" per $E \gg \omega^2$. Per $E \rightarrow +\infty$, $\dot{\theta} \simeq \sqrt{2E}$, ovvero le orbite hanno un'andamento rettilineo, parallelo a $\dot{\theta} = 0$. Questo corrisponde a moti rivolutivi con una grandissima energia cinetica, in cui l'influenza dell'energia potenziale della forza di gravità diventa trascurabile; tali moti avvengono quindi con una velocità angolare pressoché costante.

Tornando al caso di orbite aperte vicine alle curve separatrici, si può infine osservare che il loro andamento in prossimità dei punti di minimo (vicino alle orbite degeneri instabili) è approssimato dalle iperboli descritte dalla (2.9), (Fig.2.2).

Le corrispondenti orbite per il moto “regressivo” ($\dot{\theta} < 0$) si ottengono, ovviamente, per ribaltamento rispetto all’asse $\dot{\theta} = 0$.

Nota: una rappresentazione diversa dello spazio delle fasi per l’equazione di moto del pendolo rigido non lineare può essere ottenuta attraverso un superficie cilindrica, in cui il valore $\theta = 0$ coincide con $\theta = 2\pi$ ed i valori di θ sono riportati sull’asse del cilindro.

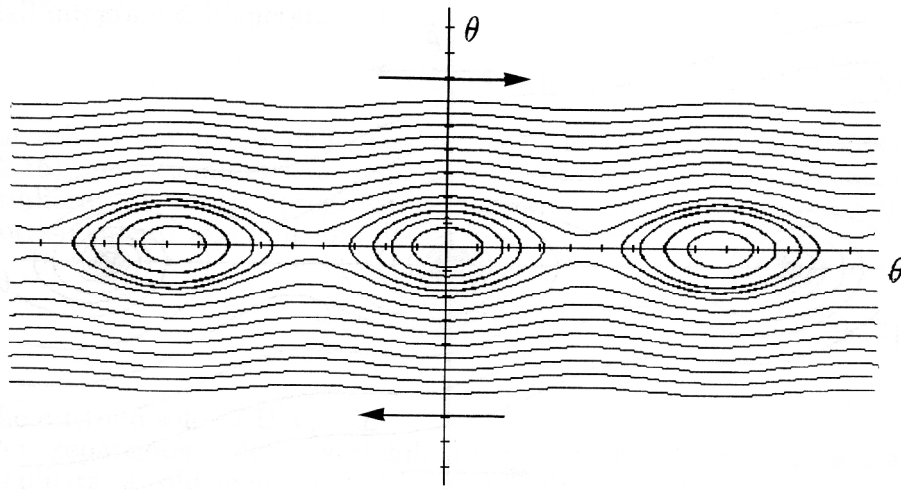


Fig.2.2

2.5 Sistemi non lineari conservativi

Consideriamo un sistema descritto da un'equazione differenziale del secondo ordine, del tipo:

$$\ddot{x} = -f(x), \quad (2.14)$$

che può essere pensata come l'equazione di moto di un sistema materiale ad un grado di libertà soggetto ad una forza (o ad un momento) $-f(x)$. Se $f(x)$ è una funzione continua, si costruisce facilmente, per quadrature, l'integrale primo:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad (2.15)$$

dove $E = \text{costante}$ è interpretabile come l'energia totale del sistema, $U(x) = \int f(x) dx$ come l'energia potenziale ed $\dot{x}^2/2$ come quella cinetica.

Se il modello espresso dalla (2.14) non è di origine meccanica, si estende il significato di energia al nuovo contesto e, quindi, si parla, in generale di sistemi non lineari conservativi. Per "risolvere" un PVI associato alla (2.14), si può procedere a partire dall'integrale dell'energia (2.15):

$$\dot{x}^2 = 2[E - U(x)]. \quad (2.16)$$

Le orbite nel piano delle fasi corrispondenti alle soluzioni della (2.16) sono simmetriche rispetto all'asse x . Ci si può limitare a studiare i moti "progressivi", descritti nel semipiano $\dot{x} > 0$, corrispondenti alle soluzioni di:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U(x))}, \quad (2.17)$$

che esistono solo se $U(x) \leq E$.

Per separazione delle variabili in (2.17), si ottiene in forma implicita la soluzione del PVI, dove, al solito $x_0 = x(0)$:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(x))}}. \quad (2.18)$$

Per ottenere la soluzione $x = x(t; x_0)$ in forma esplicita occorre che la funzione integranda in (2.18) ammetta una primitiva $F(x)$, rappresentabile per mezzo di funzioni "elementari"; in tal caso, dopo aver calcolato l'integrale:

$$t = F(x, x_0), \quad (2.19)$$

si può invertire la (2.19) su tutti gli intervalli di tempo in cui $F(x)$ ha andamento monotono rispetto ad x (come, ad esempio, nel caso dell'oscillatore armonico). Questo, però, in generale non avviene e (2.18) risulta essere integrabile solamente per serie (vedere il caso del pendolo). È di fondamentale importanza, quindi, sviluppare l'analisi qualitativa del comportamento delle soluzioni.

2.5.1 Analisi qualitativa

Iniziamo da un'analisi di tipo locale, sul comportamento delle orbite nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ in un intorno di una configurazione di equilibrio, ovvero vicino a punti in cui l'energia potenziale $U(x)$ è stazionaria.

a) Energia potenziale massima:

osserviamo la Fig.2.4; se l'energia totale del sistema uguaglia il massimo dell'energia potenziale (retta E_2 , tangente al punto di massimo per $U(x)$), l'energia cinetica deve essere nulla e l'unica orbita possibile, corrispondente al punto di tangenza, è quella degenera di equilibrio.

Agli altri punti della retta $E = E_2$, corrispondono le orbite, cosiddette separatrici, che terminano nella soluzione stazionaria instabile.

Per $E_1 > E_2$, la differenza fra l'energia totale e quella potenziale è compensata dall'energia cinetica e le orbite possono "passare" per tutti i valori della x . Viceversa, per $E_3 < E_2$, le orbite non possono attraversare quei punti del piano delle fasi la cui x è compresa fra i valori estremi del segmento che $U(x)$ intercetta sulla retta $E = E_3$: nessuna soluzione è possibile se l'energia totale è minore di quella potenziale!

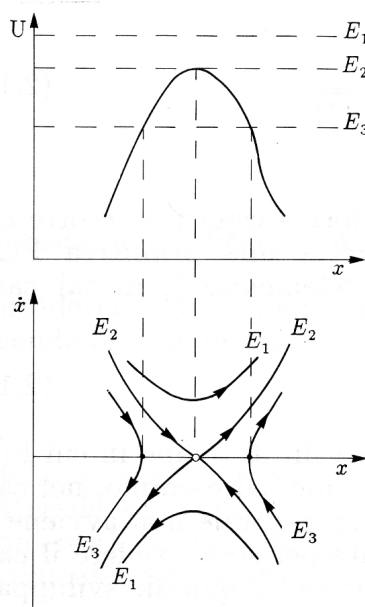


Fig.2.4

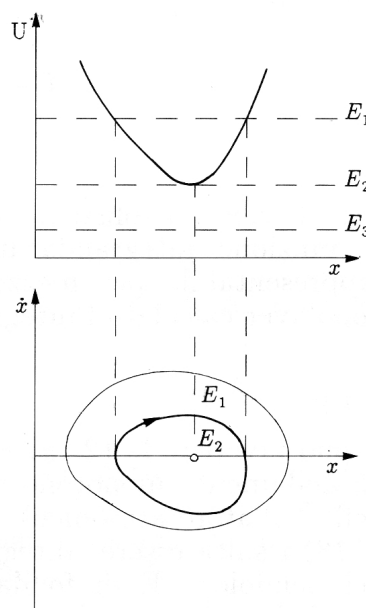


Fig.2.5

b) Energia potenziale minima:

il caso è riportato in Fig.2.5; per $E = E_3$ nessuna soluzione è possibile, mentre per $E = E_2$ esiste solo la soluzione corrispondente al punto di tangenza fra la retta e la curva che descrive $U(x)$, ovvero l'orbita degenerare che rappresenta la soluzione stazionaria stabile. Per $E_1 > E_2$ sono consentite soluzioni solo per i valori di x interni al segmento che $U(x)$ intercetta sulla retta $E = E_1$; gli estremi di tale intervallo sono punti in cui l'energia potenziale coincide con l'energia totale e, quindi, in cui $\dot{x}$ deve essere zero (estremi dell'oscillazione). Le orbite risultano essere curve chiuse che circondano la soluzione stazionaria.

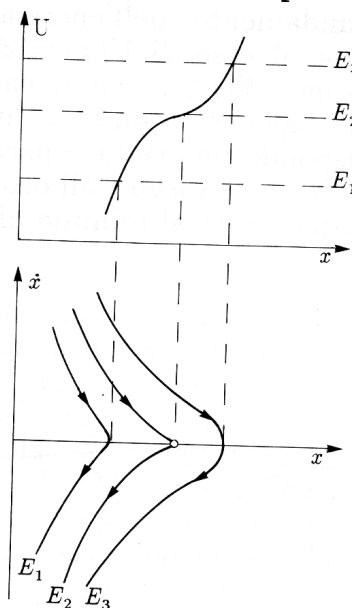


Fig.2.6

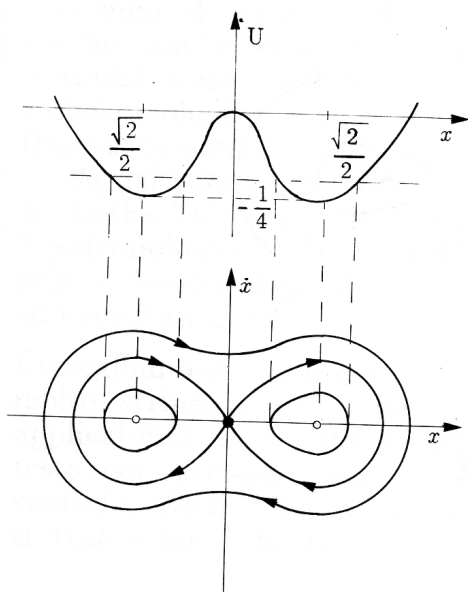


Fig.2.7

c) Flesso orizzontale:

alla retta $E = E_2$ corrispondono la soluzione di equilibrio instabile, individuata dal punto di intersezione fra la retta ed il grafico di $U(x)$, e le due orbite separatrici (una entrante e l'altra uscente) per i valori di x per i quali $U(x) < E$ (in Fig.2.6 quelli alla sinistra del punto di intersezione). Per $E_1 > E_2$ l'orbita passa alla destra della soluzione stazionaria, mentre per $E_3 < E_2$ l'orbita interseca l'asse x alla sua sinistra.

d) Analisi globale:

i punti precedenti ci permettono di determinare il comportamento globale delle orbite di un sistema conservativo, dalla conoscenza dell'andamento dell'energia potenziale $U(x)$. Riportiamo, come esempi, il caso di $U(x) = x^4 - x^2$, che presenta due minimi ed un massimo (Fig.2.7) ed il caso di $U(x) = (x-2)e^x + 1$, che mostra orbite aperte a sinistra fino al valore asintotico di $E = 1$, cui corrisponde un'orbita separatrice e, per $E < 1$, orbite chiuse (moti periodici) attorno all'orbita degenera (soluzione stazionaria) corrispondente al minimo di $U(x)$ (Fig.2.8).

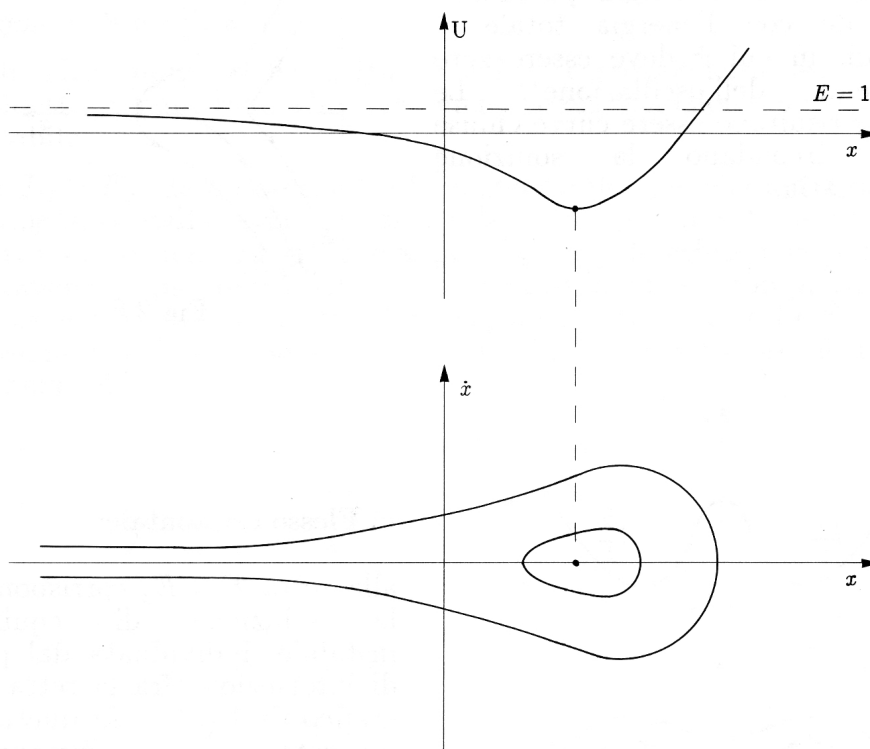


Fig.2.8