MODELLO PREDA–PREDATORE

Stabilità della Soluzione di Equilibrio Non Banale

Ricordiamo il sistema di equazioni che rappresenta il modello preda–predatore:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_3 y + k_4 xy \end{cases} . \tag{1}$$

Per dimostrare che la soluzione di equilibrio

$$\mathbf{x_e} = (x_e, y_e) = (k_3/k_4, k_1/k_2)$$

è stabile, cerchiamo una funzione di Liapunov $\Lambda(x, y)$ che in un intorno $U(\mathbf{x_e})$ di $\mathbf{x_e}$ soddisfi le condizioni richieste dal II Criterio:

$$\begin{aligned} &i)\ \Lambda(x, y) \in \mathcal{C}^1\,, \\ &ii)\ \Lambda(\mathbf{x_e}) = 0\,, \\ &iii)\ \Lambda(x, y) > 0\,, \\ &iv)\ \frac{d\Lambda}{dt} \leq 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

A questo scopo cerchiamo di costruire una funzione dinamica $H(x, y)$, tale che la sua derivata di Lie sia identicamente nulla:

$$\frac{dH}{dt} \equiv 0\,. \tag{3}$$

Cerchiamo H nella forma:

$$H(x, y) = F(x) + G(y)\,. \tag{4}$$

Da (3) e (4) otteniamo facilmente:

$$(k_2 y - k_1) x \frac{dF(x)}{dx} \equiv (k_4 x - k_3) y \frac{dG(y)}{dy}\,. \tag{5}$$

Nella (5) si possono separare le variabili:

$$\frac{xdF/dx}{k_4x - k_3} = \frac{ydG/dy}{k_2y - k_1} = C \ ,$$

dove, dovendo risultare uguali due funzioni dipendenti separatamente dalle variabili indipendenti x e y, C è una costante. Se scegliamo $C = 1$, otteniamo:

$$\frac{xdF/dx}{k_4x - k_3} = 1 \ ,$$

cioè

$$\frac{dF}{dx} = k_4 - \frac{k_3}{x}$$

e, in conclusione:

$$F(x) = k_4x - k_3 \ln x + C_1 \ .$$

Procedendo in maniera analoga per $G(y)$ si ottiene:

$$G(y) = k_2y - k_1 \ln y + C_2 \ .$$

Abbiamo costruito una funzione $H(x,y) = F(x) + G(y)$ che soddisfa (3) e proviamo che la funzione

$$\Lambda(x,y) = H(x,y) - H(x_e, y_e)$$

è una funzione di Liapunov e quindi soddisfa le condizioni del II Criterio indicate al punto (2):

Lemma *La funzione $\Lambda(x,y)$ ammette un minimo isolato nel punto (x_e, y_e) .*

<u>Prova.</u> Si prova immediatamente che il gradiente di Λ è nullo in (x_e, y_e) e che il determinate Hessiano è definito positivo. Infatti:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right|_{\binom{x=x_e}{y=y_e}} = k_4 - \tfrac{k_3}{x} = 0 \ , \\
&\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right|_{\binom{x=x_e}{y=y_e}} = k_2 - \tfrac{k_1}{y} = 0 \ , \\
&\left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right|_{\binom{x=x_e}{y=y_e}} = \tfrac{k_3}{x_e^2} > 0 \ , \\
&\left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2}\right|_{\binom{x=x_e}{y=y_e}} = \tfrac{k_1}{y_e^2} > 0 \ , \\
&\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \equiv 0 \ .
\end{aligned}$$

La funzione $\Lambda(x,y)$ soddisfa quindi tutti i punti di (2) il che prova che la soluzione di equilibrio $\mathbf{x_e}$ di (1) è stabile