

**Giovanni Borgioli**

**MODELLI  
MATEMATICI  
DI EVOLUZIONE  
ED EQUAZIONI  
DIFFERENZIALI**

QUADERNI DI MATEMATICA PER LE SCIENZE APPLICATE/2

## CAPITOLO 6 STABILITÀ

### 6.1 Introduzione

In questo capitolo affronteremo il problema della stabilità delle soluzioni, ed in particolare delle soluzioni di equilibrio, di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Le definizioni ed i teoremi presentati sono limitati ad alcuni concetti fondamentali (stabilità, stabilità asintotica, instabilità “nel futuro”, cioè per  $t > t_0$ ) introdotti da A.M. Liapunov fra la fine dell'800 e gli inizi del 900.

Ci occuperemo, quindi, tranne che negli esempi dell'ultima parte del capitolo riguardanti semplici problemi di biforcazione (cioè di stabilità rispetto ai parametri presenti nelle equazioni), esclusivamente di stabilità “secondo Liapunov”. La comprensione dell'importanza degli argomenti esposti può essere favorita dal seguente semplice ragionamento: se nel PVI

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad , \quad (6.1)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}; t)$  è sufficientemente “regolare” (vedi Cap.5), è garantita l'esistenza e l'unicità  $\forall t \in [t_0, T)$  di una soluzione massimale che soddisfa la condizione iniziale (considereremo, in generale,  $T = +\infty$ ) ; ma, se si variano di poco le condizioni iniziali, avremo una soluzione “vicina” a quella precedentemente considerata, o una che, nel passare del tempo, si “allontana” sempre di più? La questione ha una rilevanza fondamentale se si pensa che i dati iniziali (come d'altra parte i parametri coinvolti nelle equazioni) sono affetti dagli errori di misura e dagli errori di carattere numerico: errori di cui si deve tenere conto quando si passa al calcolo, necessariamente approssimato, delle soluzioni. Non si può, perciò, pensare di riprodurre “esattamente” le condizioni iniziali e, quindi, il trattamento matematico della dipendenza delle

soluzioni da tali condizioni si impone come un punto chiave della teoria delle equazioni differenziali ordinarie di evoluzione e, in generale, dei sistemi dinamici.

## 6.2 Definizioni

Consideriamo il sistema (6.1) o, in componenti:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n; t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2)$$

dove  $F$  soddisfa le condizioni del Teorema di Esistenza ed Unicità (Teor.5.16) e sia  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  una soluzione di (6.1)  $\forall t > t_0$ , con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

Se esiste  $\mathbf{x}_e$ , tale che:

$$F(\mathbf{x}_e; t) = 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

$\mathbf{x}_e$  prende il nome di soluzione di equilibrio, o stazionaria, per il sistema (6.1).

(Def.6.3) **Stabilità delle soluzioni di equilibrio:**  $\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio stabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tale che, se:

- i)  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta$ , ne segue che:
- ii)  $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$ ,  $\forall t > t_0$  e dove  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  è una qualunque soluzione di (6.1) il cui valore iniziale  $\mathbf{x}_0$  soddisfa i).

Una definizione equivalente, più intuitiva, può essere data nel seguente modo:

$\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio stabile se, fissato  $t_0$ , comunque presa una sfera  $B_\varepsilon$  di centro  $\mathbf{x}_e$  e raggio  $\varepsilon$ , nello spazio delle fasi, è possibile determinare una sfera  $B_\delta$  di centro  $\mathbf{x}_e$  e raggio  $\delta \leq \varepsilon$ , tale che ogni orbita (o più correttamente ogni semiorbita positiva), che parte per  $t = t_0$  in  $B_\delta$ , rimanga dentro  $B_\varepsilon$   $\forall t > t_0$ .

Quando le condizioni poste in (Def.6.3) non son verificate si dirà che  $\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio instabile. Ricordiamo anche che  $\mathbf{x}_e$  viene detta uniformemente stabile se  $\delta$  in (Def.6.3) non dipende da  $t_0$ , ma dipende solo da  $\varepsilon$ , cioè  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .



(Def.6.4) **Stabilità asintotica delle soluzioni di equilibrio:**  $\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio asintoticamente stabile (nel futuro) se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tale che, se:

i)  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta$ , ne segue che:  $\mathbf{x}_e$  soddisfa ii) in (Def.6.3) ed inoltre:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| = 0$ , dove  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  è una qualunque soluzione di (6.1) il cui valore iniziale  $\mathbf{x}_0$  soddisfa i).

Una definizione equivalente può essere la seguente:

$\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio asintoticamente stabile se, fissato  $t_0$ , esiste una sfera  $B_{\hat{\varepsilon}}$  di centro  $\mathbf{x}_e$  e raggio  $\hat{\varepsilon}$ , nello spazio delle fasi, tale che ogni orbita (o più correttamente ogni semiorbita positiva), che parte per  $t = t_0$  in  $B_{\hat{\varepsilon}}$  tende ad  $\mathbf{x}_e$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

Ricordiamo che  $\mathbf{x}_e$  viene detta uniformemente asintoticamente stabile se  $\delta$  in (Def.6.4) non dipende da  $t_0$ , ma dipende solo da  $\varepsilon$ , cioè se  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

Le definizioni sopra introdotte si generalizzano naturalmente ad ogni generica soluzione non stazionaria del sistema (6.1).

Sia, ad esempio,  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  una soluzione di (6.1) con condizioni iniziali  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*$ ; le (Def.6.3) e (Def.6.4) si estendono nel modo seguente:

(Def.6.5) **Stabilità delle soluzioni:**  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  è una soluzione stabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tale che, se:

i)  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*\| < \delta$ , ne segue che:

ii)  $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)\| < \varepsilon, \forall t > t_0$

e dove  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  è una qualunque altra soluzione di (6.1) il cui valore iniziale  $\mathbf{x}_0$  soddisfa i).

Se  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  non soddisfa (Def.6.5) è detta soluzione instabile.

(Def.6.6) **Stabilità asintotica delle soluzioni:**  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  è una soluzione asintoticamente stabile (nel futuro) se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tale che, se:

i)  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*\| < \delta$ , ne segue che:  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  soddisfa ii) in (Def.6.5) ed inoltre:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)\| = 0$ ,



dove  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  è una qualunque altra soluzione di (6.1) il cui valore iniziale  $\mathbf{x}_0$  soddisfa i).

Analogamente a quanto visto per le soluzioni di equilibrio, si ha uniforme stabilità in (Def.6.5) ed uniforme asintotica stabilità in (Def.6.6) quando  $\delta$  non dipende da  $t_0$ , ma solo da  $\varepsilon$ .

### 6.3 Stabilità lineare

Nel caso in cui il sistema (6.1) sia lineare si possono ottenere molti risultati generali sulla stabilità delle soluzioni. In particolare, come vedremo nel seguente (Teor.6.9), le proprietà di stabilità (o di stabilità asintotica, o di instabilità) di una qualunque soluzione di evoluzione di un sistema lineare sono le stesse dell'unica soluzione di equilibrio del sistema lineare omogeneo ad esso associato,  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ . Consideriamo, per semplicità, il seguente sistema lineare, omogeneo ed autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x} \quad , \quad (6.7)$$

dove  $\mathbb{A}$  è una matrice  $n \times n$ , non singolare ( $\det \mathbb{A} \neq 0$ ), non dipendente dal tempo. Dalla teoria delle equazioni algebriche lineari, segue immediatamente il seguente Teorema, che ci limitiamo ad enunciare:

(Teor.6.8) *TEOREMA: l'unica soluzione di equilibrio per il sistema (6.7) è  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ .*

(Teor.6.9) *TEOREMA: sia  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  la soluzione di (6.7) con condizioni iniziali  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*$ :*

*$\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  ha le stesse proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ . Ovvero  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  è stabile, asintoticamente stabile o instabile, se  $\mathbf{0}$  è stabile, asintoticamente stabile o instabile.*

Prova: consideriamo un'arbitraria soluzione di (6.7),  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ , con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Per la linearità del sistema (6.7), avremo che la funzione:

$$\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$$

è la soluzione del seguente PVI:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{A}\mathbf{z} \quad , \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^* \quad .$$

Se la soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è stabile, deve soddisfare (Def.6.3) e, quindi,  $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*)$  deve soddisfare (Def.6.5); poiché vale anche la relazione inversa, segue che l'enunciato del teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente. Analoghe considerazioni valgono per le proprietà di stabilità asintotica e di instabilità e, quindi, la prova è conclusa.  $\square$

**Nota:** come è facile verificare, il (Teor.6.9) vale anche nel caso lineare più generale, non autonomo e non omogeneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) , \quad (6.10)$$

dove  $\mathbf{f}(t)$  è una funzione nota del tempo ed  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è l'unica soluzione stazionaria del sistema lineare omogeneo, associato ad (6.10):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} ,$$

con  $\mathbb{A}$  matrice  $n \times n$ , dipendente dal tempo, non singolare  $\forall t > t_0$ .

Le proprietà di stabilità della soluzione  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  hanno quindi, nel caso lineare, carattere "globale", estendendosi ad ogni altra soluzione evolutiva di (6.10).

Riprendiamo, qui, da [3, p.354], in forma leggermente modificata, l'enunciato di un teorema generale, che consente di conoscere, in ogni situazione, le proprietà di  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  e, quindi, per mezzo del (Teor.6.9), di ogni altra soluzione. Limitiamoci, per semplicità, al caso autonomo (6.7):

(Teor.6.11) **TEOREMA:** consideriamo  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , unica soluzione di equilibrio del sistema (6.7):

- i)  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è asintoticamente stabile, se tutti gli autovalori di  $\mathbb{A}$  hanno parte reale negativa;
- ii)  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è instabile, se almeno un autovalore di  $\mathbb{A}$  ha parte reale positiva;
- iii) supponiamo che tutti gli autovalori di  $\mathbb{A}$  abbiano parte reale non positiva (i.e.  $\leq 0$ ) e che  $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_m = i\sigma_m$ , con  $m \leq n$ , abbiano parte reale nulla ed indichiamo con  $k_j$  la molteplicità di ciascuno di essi ( $j = 1, \dots, m$ ). Questo significa che il polinomio caratteristico,  $P(\lambda)$ , di  $\mathbb{A}$  può essere fattorizzato nel modo seguente:

$$P(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_m)^{k_m} Q(\lambda) ,$$

dove tutte le radici di  $Q(\lambda)$  hanno parte reale negativa.

Allora  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è stabile se  $\mathbb{A}$  possiede  $k_j$  autovettori linearmente indipendenti per ciascun autovalore  $\lambda_j = i\sigma_j$ . Altrimenti  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  è instabile.

Ricordiamo la seguente terminologia generale che riassume in modo efficace le proprietà di stabilità di una soluzione di equilibrio e che si usa anche nei casi non lineari (vedere i successivi (Teor.6.17) e la Proposizione (6.18)):

i) se la matrice  $\mathbb{A}$  ha autovalori reali di segno opposto, la soluzione di equilibrio (instabile) prende il nome di **punto sella**;

ii) se la matrice  $\mathbb{A}$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa, la soluzione di equilibrio (asintoticamente stabile) prende il nome di **pozzo (sink)**;

iii) se la matrice  $\mathbb{A}$  ha tutti gli autovalori con parte reale positiva, la soluzione di equilibrio (instabile) prende il nome di **sorgente (source)**;

iv) se la matrice  $\mathbb{A}$  ha tutti gli autovalori immaginari puri, la soluzione di equilibrio prende il nome di **centro**.

#### 6.4 Sistemi lineari a due dimensioni

Analizziamo in dettaglio, nel caso più semplice a dimensione 2 ( $n = 2$ ), le proprietà di stabilità di  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , in dipendenza dai valori assunti dagli autovalori di  $\mathbb{A}$ . Potremo costruire, di conseguenza, il ritratto globale delle soluzioni nel piano delle fasi. L'analisi per sistemi lineari del primo ordine di  $n$  equazioni è più complessa, ma si basa su considerazioni simili a quelle che svolgeremo per un sistema di dimensione 2.

Consideriamo il sistema (6.7) nel caso in cui  $\mathbb{A}$  sia una matrice  $2 \times 2$ . Se poniamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

il sistema assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}, \quad (6.12)$$



dove  $a, b, c, e d$  sono parametri reali. In questo caso la stabilità è legata alle proprietà degli autovalori della matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Siano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  i due autovalori della matrice  $\mathbb{A}$ , distinguiamo i vari casi:

a)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reali, entrambi negativi. Siano  $\mathbf{v}_1 = (\xi_1, \eta_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (\xi_2, \eta_2)$  gli autovettori corrispondenti. La soluzione generale prende la forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 , \quad (6.13_1)$$

o, esplicitando le componenti dei vettori, la seguente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} . \quad (6.13_2)$$

A causa degli esponenziali negativi, ogni soluzione (6.13), per ogni scelta delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ , tende a  $(0,0)$  per  $t \rightarrow +\infty$ . In particolare le semirette che hanno direzione  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $-\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2$  sono orbite rettilinee che tendono all'origine. Il punto  $(0,0)$  viene detto **nodo stabile** (Fig.6.1). Si noti che il nodo stabile rientra nella definizione di **pozzo**.

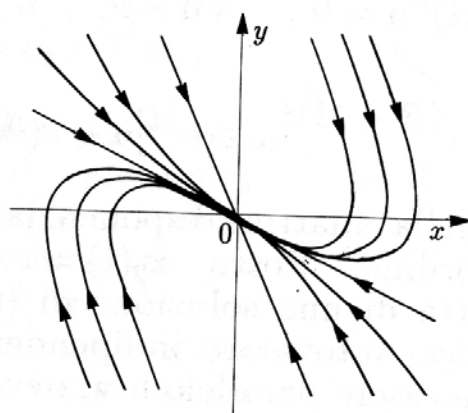


Fig.6.1

b)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reali, entrambi positivi. Siano  $\mathbf{v}_1 = (\xi_1, \eta_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (\xi_2, \eta_2)$  gli autovettori corrispondenti. Questo caso è analogo al precedente, il diagramma nel piano delle fasi, con la differenza che le frecce temporali sono invertite. Il punto  $(0,0)$  viene detto **nodo instabile**, e rientra nella definizione di **sorgente**.

c)  $\lambda_1 = \lambda_2$  **reali, negativi**. Questa volta dobbiamo distinguere due casi a seconda che  $\mathbb{A}$  abbia uno o due vettori linearmente indipendenti, anche se si tratta, in ogni caso, di un **pozzo**.

c') Siano  $\mathbf{v}_1 = (\xi_1, \eta_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (\xi_2, \eta_2)$  gli autovettori linearmente indipendenti. La soluzione ha la forma generale:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2).$$

Al variare di  $c_1$  e  $c_2$  otteniamo ogni direzione passante per l'origine e quindi il diagramma delle fasi è costituito da semirette con il verso temporale centripeto (Fig.6.2).

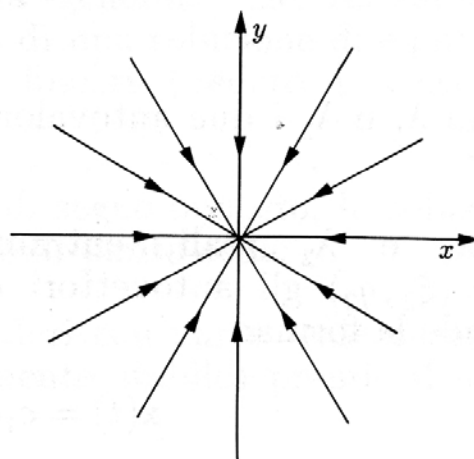


Fig.6.2

c'') Sia  $\mathbf{v} = (\xi, \eta)$  l'unico autovettore corrispondente a  $\lambda < 0$ . Una soluzione della (6.12) è quindi data da:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Cerchiamo una seconda soluzione indipendente da  $\mathbf{x}_1$ , consideriamo un vettore  $\mathbf{u} = (\xi', \eta')$ , indipendente da  $\mathbf{v}$ , ricordando che, poiché  $\mathbf{v}$  è l'unico autovettore, avremo:

$$(\mathbb{A} - \lambda I)^n \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad n \geq 2. \quad (6.14)$$

Inoltre:

$$e^{\lambda t} \mathbf{u} \equiv e^{\lambda t} e^{(\mathbb{A} - \lambda I)t} \mathbf{u} \equiv e^{\lambda t} [\mathbf{u} + t(\mathbb{A} - \lambda I)\mathbf{u}],$$

poiché lo sviluppo della matrice esponenziale, per la (6.14), si arresta al primo ordine. Posto  $\mathbf{x}_2(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{u}$ , si verifica facilmente che si tratta di una soluzione di (6.12). Avremo infine che, poiché  $\mathbf{v}$  è l'unico autovalore indipendente, allora il vettore  $(\mathbb{A} - \lambda I)\mathbf{u}$  non può che essere parallelo a  $\mathbf{v}$ , ovvero:

$$(\mathbb{A} - \lambda I)\mathbf{u} = k\mathbf{v},$$

dove  $k$  è una qualche costante scalare. La soluzione generale è quindi esprimibile come combinazione lineare di  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $\mathbf{x}_2(t)$ :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{u} + c_2 k t \mathbf{v}).$$

Esplicitando le componenti dei vettori, la soluzione prende la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \left[ c_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} + c_2 k t \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right].$$

Ogni orbita tende a  $(0,0)$  a causa dell'esponenziale negativo. Inoltre, se  $c_2 \neq 0$ , il termine  $c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{u}$  è piccolo rispetto a  $c_2 k t \mathbf{v}$ , quando  $t$  è molto grande. Quindi, al limite, le orbite tendono ad essere tangenti alle direzioni  $\pm \mathbf{v}$ , a seconda del segno di  $c_2$ .

d)  $\lambda_1 = \lambda_2$  **reali, positivi**. Questo caso è analogo al precedente, con la differenza che le direzioni temporali nei diagrammi corrispondenti ai casi c') e c'') devono essere invertite. L'origine è una **sorgente**.

e)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  **reali, discordi**. Per fissare le idee supponiamo  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  e siano  $\mathbf{v}_1 = (\xi_1, \eta_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (\xi_2, \eta_2)$  gli autovettori corrispondenti. Dividiamo il piano tramite due rette per l'origine, parallele alle direzioni degli autovettori. Le semirette dall'origine sono le orbite delle soluzioni:

$$\mathbf{x}_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \quad c_1 > 0; \quad \mathbf{x}_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \quad c_1 < 0;$$

$$\mathbf{x}_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad c_2 > 0; \quad \mathbf{x}_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad c_2 < 0;$$

con i versi di percorrenza come indicati in figura. Vediamo ora la soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2;$$

il segno dell'autovalore positivo fa sì che per  $c_2 \neq 0$  predomini l'esponenziale  $\exp(\lambda_2 t)$ ; l'orbita diventa quindi non limitata per  $t \rightarrow +\infty$ . Per  $c_1 \neq 0$  predomina l'esponenziale negativo  $\exp(\lambda_1 t)$  e l'orbita diventa non limitata per  $t \rightarrow -\infty$ . Il punto d'equilibrio, come si è detto precedentemente, è un **punto sella** (Fig.6.3).

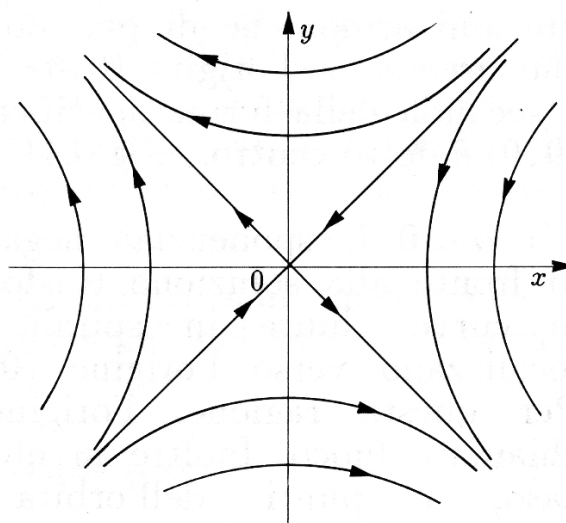


Fig.6.3

f)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  **complessi coniugati**. Per fissare le idee  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , e sia  $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  l'autovettore corrispondente a  $\lambda_1$ . Allora, tenendo conto che  $\exp(\lambda_1 t)[\mathbf{u} + i\mathbf{v}]$  è una soluzione



complessa della nostra equazione lineare, possiamo ottenere da essa due soluzioni reali linearmente indipendenti, con le quali possiamo esprimere la soluzione generale. Consideriamo quindi:

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{z} = e^{(\alpha + i\beta)t} (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) .$$

Ricorrendo alle formule di Eulero si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} \mathbf{z} &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \\ &= e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{v} \sin \beta t) + i e^{\alpha t} (\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{v} \cos \beta t) . \end{aligned}$$

Le due funzioni reali:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{v} \sin \beta t) ,$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{v} \cos \beta t)$$

sono linearmente indipendenti e la soluzione generale può essere sempre espressa come loro combinazione lineare.

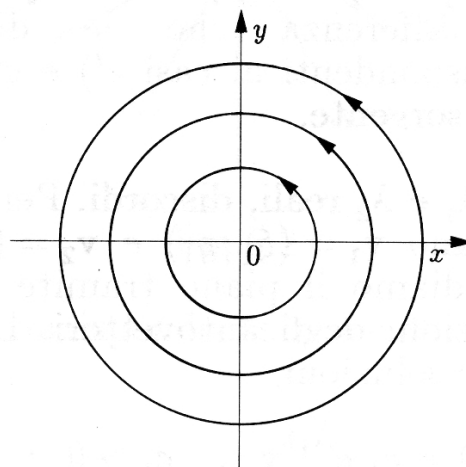


Fig.6.4

*f')*  $\alpha = 0$ . La soluzione generale  $\mathbf{x}(t)$  non contiene più l'esponenziale e si può esprimere come combinazione lineare di funzioni armoniche di periodo  $2\pi/\beta$ . Le orbite sono curve chiuse che circondano l'origine  $(0,0)$ , percorse in senso orario o antiorario, a seconda della forma specifica della (6.12). Il punto di equilibrio  $(0,0)$  è detto **centro**. (Fig.6.4).

*f'')*  $\alpha < 0$ . L'esponenziale negativo di fronte alla soluzione trasforma le curve chiuse in spirali che focalizzano verso l'origine  $(0,0)$ . Per questa ragione, l'origine è chiamato fuoco. Inoltre in questo caso, i punti dell'orbita si avvicinano all'origine col crescere di  $t$  e quindi, l'origine è punto di equilibrio stabile, detto **fuoco (o spirale) stabile** e si tratta di un **pozzo**. (Fig.6.5).

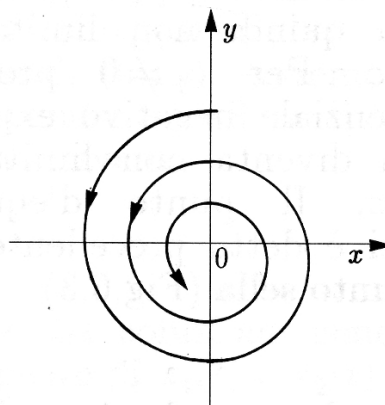


Fig.6.5

$f''')$   $\alpha > 0$ . L'esponentiale positivo questa volta trasforma le curve chiuse in spirali che si allontanano dall'origine  $(0,0)$ . L'origine è un punto di equilibrio instabile, detto **fuoco (o spirale) instabile** e si tratta di una **sorgente**. (Fig.6.6).

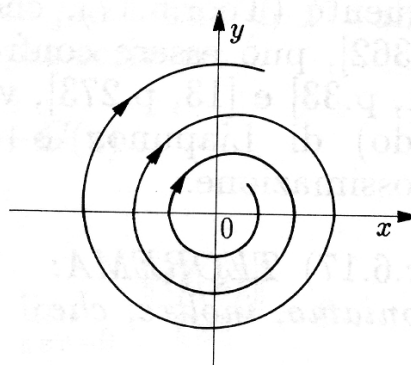


Fig.6.6

### 6.5 Stabilità di sistemi non lineari

Limitiamoci a discutere il caso autonomo, ricordando le considerazioni ed i risultati ottenuti nel Capitolo 5. Nel caso più generale di sistemi non lineari, del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \quad (6.15)$$

è molto più complesso, e non sempre è possibile, determinare le proprietà di stabilità di una soluzione. Ricordiamo, fra l'altro, che il numero di soluzioni stazionarie  $\mathbf{x}_e$  dell'equazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

dipende dalla specifica forma di  $\mathbf{F}$  e che, ovviamente, non vale niente di simile al (Teor.6.9). Il tipo di stabilità delle (eventuali) soluzioni di equilibrio, nel caso non lineare, è una proprietà di carattere locale ed, in generale, "influenza" le proprietà delle soluzioni di moto solo in regioni circostanti limitate dello spazio delle fasi.

Consideriamo, prima di tutto, un problema non lineare che si presenta nella forma di una "perturbazione" del problema lineare (6.7):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} . \quad (6.16)$$

In questo caso, detto **semilineare**, alcune delle proprietà di stabilità della soluzione stazionaria  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  di (6.16) possono essere dedotte dalle analoghe proprietà della soluzione stazionaria  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  del problema linearizzato:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} .$$

Il seguente (Teor.6.17), che riprendiamo, in forma modificata, da [3, p.362], può essere confrontato con versioni leggermente diverse in [11, p.33] e [13, p.273], viene talvolta indicato come I Criterio (o Metodo) di Liapunov o come Teorema di Stabilità in Prima Approssimazione.

(Teor.6.17) *TEOREMA:* consideriamo il sistema (6.16) e supponiamo, inoltre, che:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|G(x)\|}{\|x\|} = 0 ;$$

ne segue che:

i) la soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  di (6.16) è asintoticamente stabile se la soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  dell'equazione linearizzata  $\dot{x} = Ax$  è asintoticamente stabile (ovvero se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa).

ii) la soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  di (6.16) è instabile se la soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  dell'equazione linearizzata  $\dot{x} = Ax$  è instabile (ovvero se almeno uno degli autovalori di  $A$  ha parte reale positiva);

iii) la stabilità della soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  di (6.16) non può essere determinata, se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale non positiva, ma almeno uno di essi ha parte reale zero.

È interessante confrontare il (Teor.6.17) con il (Teor.6.11), valido per i sistemi lineari: mentre la stabilità asintotica e l'instabilità della soluzione di equilibrio del sistema lineare non vengono modificate dall'aggiunta di una piccola perturbazione non lineare (casi i) e ii)), nel caso iii) la perturbazione non lineare  $G(x)$ , per quanto "piccola", può modificare del tutto la situazione.

Il (Teor.6.11) fornisce un metodo per determinare con certezza le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio  $x_e = 0$  per i sistemi di equazioni lineari anche nel caso iii), ma il (Teor.6.17) non è in grado di assicurarci che tali proprietà permangano nel caso semilineare. In particolare (vedi §3.4.2), se  $x_e = 0$  rappresenta un centro per l'equazione linearizzata, il (Teor.6.17) non ci dà alcun aiuto per stabilire la permanenza di tale proprietà per la soluzione  $x_e = 0$  del sistema non lineare.

Il (Teor.6.17) fornisce un criterio di linearizzazione per sistemi del tipo (6.15) nelle vicinanze di soluzioni di equilibrio. Consideriamo il sistema non lineare autonomo (6.15) e sia  $z = x - x_e$ , dove  $x_e$  è una soluzione di equilibrio di (6.15) (i.e.  $F(x_e) = 0$ ); allora se  $F$  è

**differenziabile**, e se  $J_F(\mathbf{x}_e)$ , la matrice jacobiana di  $F$  valutata in  $\mathbf{x}_e$ , non è la matrice nulla, si può sempre scrivere:

$$F(\mathbf{x}) = J_F(\mathbf{x}_e)\mathbf{z} + G(\mathbf{z}) ,$$

dove  $G(\mathbf{z})$  è il “resto” e, quindi:

$$\|G(\mathbf{z})\| = o(\|\mathbf{z}\|) , \quad \text{ovvero} \quad \lim_{\|\mathbf{z}\| \rightarrow 0} \frac{\|G(\mathbf{z})\|}{\|\mathbf{z}\|} = 0 .$$

Ne consegue, quindi, che la forma semilineare (6.16) è, in molti casi, una rappresentazione corretta di sistemi non lineari, del tipo (6.15), nelle “vicinanze” di soluzioni di equilibrio, ed alla quale ci si può spesso ricondurre. Se applichiamo il (Teor.6.17) alla (6.15), scritta nella forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = J_F(\mathbf{x}_e)\mathbf{z} + G(\mathbf{z}) ,$$

possiamo ottenere le seguenti proposizioni per le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  di (6.15):

(6.18) *PROPOSIZIONE: sia  $\mathbf{x}_e$  una soluzione di equilibrio del sistema (6.15) e sia  $F(\mathbf{x})$  differenziabile, allora:*

- i) se tutti gli autovalori di  $J_F(\mathbf{x}_e)$  hanno parte reale negativa, allora  $\mathbf{x}_e$  è asintoticamente stabile;*
- ii) se almeno un autovalore di  $J_F(\mathbf{x}_e)$  ha parte reale positiva, allora  $\mathbf{x}_e$  è instabile;*
- iii) se tutti gli autovalori di  $J_F(\mathbf{x}_e)$  hanno parte reale non positiva, ma almeno uno ha parte reale nulla, le proprietà di stabilità di  $\mathbf{x}_e$  restano non determinate.*

Nella situazione del punto *iii)*, occorrerà dunque studiare le proprietà della soluzione di equilibrio con metodi alternativi (ad es. con il II Criterio di Liapunov).

(6.19) • *Esempio:* consideriamo la seguente equazione di un oscillatore non lineare del tipo di Van der Pol:

$$\ddot{x} + \dot{x}(1 - x^2) + x = 0 ;$$

si osservi che il termine che contiene  $\dot{x}$  è dissipativo per  $x < 1$  e, quindi, ci attendiamo che la soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0} = (0, 0)$  sia asintoticamente stabile.



Possiamo provarlo rigorosamente con il (Teor.6.17). Se poniamo  $y = \dot{x}$ , possiamo scrivere l'equazione come sistema del primo ordine:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix};$$

la perturbazione non lineare soddisfa l'ipotesi del (Teor.6.17); infatti:

$$|x^2 y| = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y^2} < \sqrt{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{x}\|^3,$$

dove:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Inoltre, gli autovalori della matrice sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3i}{2},$$

il che soddisfa il punto i) del (Teor.6.17). •

Il (Teor.6.17) consente dunque di individuare le proprietà di stabilità di una soluzione di equilibrio del sistema non lineare (6.15) solo nel caso di asintotica stabilità (o di instabilità, come in ii)).

Passiamo adesso ad un metodo più generale per lo studio delle proprietà di stabilità delle soluzioni di equilibrio, applicabile sia a problemi autonomi lineari che non lineari. Tale metodo, noto sotto il nome di II Criterio (o di "Metodo diretto") di Liapunov, si basa sulla possibilità di costruire una opportuna funzione di  $\mathbf{x}$ ,  $\Lambda(\mathbf{x})$ , detta funzione di Liapunov, il cui comportamento, per  $\mathbf{x}$  vicino ad una soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e$ , ne determini le proprietà di stabilità. L'idea risale al matematico ed ingegnere russo A.M.Liapunov, che la formulò nella sua tesi di dottorato (1892). Si tratta di una generalizzazione del fatto che, nel caso in cui  $\mathbf{x}_e$  sia asintoticamente stabile, esiste una norma in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\|$  decresce nel tempo per soluzioni  $\mathbf{x}(t)$  vicine ad  $\mathbf{x}_e$ . Liapunov dimostrò che potevano essere usati altri tipi di funzioni, al posto della norma, per provare le proprietà di stabilità.

Torniamo a considerare il sistema non lineare autonomo (6.15):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

dove  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ . Sia  $\mathfrak{F}$  una funzione dinamica, ovvero una qualunque funzione scalare di  $\mathbf{x}$  definita su un sottoinsieme  $\Omega$  dello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^n$  (i.e.  $\mathfrak{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Introduciamo la seguente definizione:

(Def.6.20) **Derivata di Lie:** se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  è soluzione di (6.15), si ha:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{F}(\mathbf{x}) = \nabla \mathfrak{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_i} F_i.$$

Tale derivata prende il nome di “derivata lungo le soluzioni” o derivata di Lie della  $\mathfrak{F}(\mathbf{x})$ .

La derivata lungo le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali esprime la velocità con cui una funzione delle soluzioni (detta “funzione dinamica”) varia, durante l’evoluzione delle soluzioni stesse.

(6.21) • *Esempio:* consideriamo un punto materiale di massa  $m$ , soggetto ad una forza elastica, che può muoversi su di una guida rettilinea liscia; la sua equazione di moto è:

$$m\ddot{x} = -kx$$

e può essere messa sotto forma di sistema lineare del primo ordine del tipo (6.7), con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix};$$

l’energia totale meccanica,  $E$ , del punto materiale è una “funzione dinamica” delle soluzioni dell’equazione di moto:

$$E = E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2;$$

la sua derivata lungo le traiettorie:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{x}) = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

ne esprime la velocità di variazione durante il moto, ovvero, in questo caso, il Teorema di Conservazione dell’Energia. •

Enunciamo adesso il seguente, fondamentale, teorema:

(Teor.6.22) **TEOREMA (II CRITERIO di LIAPUNOV)**: sia  $\mathbf{x}_e$  una soluzione di equilibrio per il sistema (6.15) ed  $U_{\mathbf{x}_e} \subset \mathbb{R}^n$  un intorno di  $\mathbf{x}_e$ ; sia inoltre  $\Lambda: U_{\mathbf{x}_e} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode delle seguenti proprietà:

- i)  $\Lambda \in C^1(U_{\mathbf{x}_e})$  ,
- ii)  $\Lambda(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e} \setminus \{\mathbf{x}_e\}$  ,
- iii)  $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$  ,
- iv)  $\frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{x}) = \nabla\Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Lambda}{\partial x_i} F_i \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e}$  .

Allora  $\mathbf{x}_e$  è una soluzione di equilibrio stabile per il sistema (6.15).

Prova: la dimostrazione segue quella fornita da [12, p.194].

Consideriamo  $B_\delta(\mathbf{x}_e)$ , la sfera chiusa di raggio  $\delta$  e centro  $\mathbf{x}_e$ , e sia  $\delta$  sufficientemente piccolo così che  $B_\delta(\mathbf{x}_e)$  sia completamente contenuta nell'intorno  $U_{\mathbf{x}_e}$ . Sia  $\lambda^*$  il valore minimo assunto da  $\Lambda(\mathbf{x})$  sulla frontiera di  $B_\delta(\mathbf{x}_e)$ , cioè su  $S_\delta(\mathbf{x}_e)$ , superficie della sfera di raggio  $\delta$  e centro  $\mathbf{x}_e$ ; da ii) segue che  $\lambda^* > 0$ . Consideriamo adesso  $U'_{\mathbf{x}_e} = \{\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_e) : \Lambda(\mathbf{x}) < \lambda^*\}$ : nessuna soluzione che parta dentro l'insieme  $U'_{\mathbf{x}_e}$  può raggiungere  $S_\delta(\mathbf{x}_e)$ , poiché  $\Lambda(\mathbf{x})$  è non crescente lungo le traiettorie. Quindi nessuna soluzione che parta in  $U'_{\mathbf{x}_e}$  può lasciare  $B_\delta(\mathbf{x}_e)$ , il che prova che  $\mathbf{x}_e$  è stabile.  $\square$

Riportiamo in Fig.6.7, l'andamento per le proiezioni delle traiettorie (o curve integrali) sul grafico di una tipica funzione di Liapunov (che ha la forma di un paraboloide), per  $n=2$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ , ed il corrispondente andamento delle proiezioni sul piano delle fasi (orbite). Il punto di equilibrio è un centro.

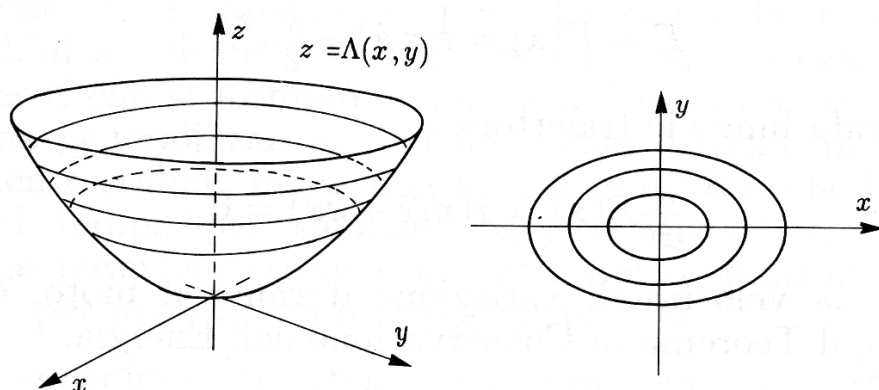


Fig. 6.7

(6.23) • *Esempio:* consideriamo l'equazione di moto del pendolo rigido (2.1):

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l};$$

possiamo dimostrare la stabilità della soluzione di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$  utilizzando la seguente funzione di Liapunov:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos \theta), \quad \text{dove } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix};$$

la derivata lungo le traiettorie di  $\Lambda(\mathbf{x})$  è data da:

$$\frac{d}{dt} \Lambda(\mathbf{x}) = \nabla \Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta) = 0,$$

il che prova la stabilità di  $\mathbf{x}_e$ . Si noti che  $\Lambda(\mathbf{x})$  è, sostanzialmente, l'energia totale meccanica del pendolo. •

Riportiamo, adesso, senza dimostrazione una versione modificata del (Teor.6.22), dove si indicano le condizioni che una funzione di Liapunov deve soddisfare nel caso di asintotica stabilità:

(Teor.6.24) *TEOREMA:* sia  $\mathbf{x}_e$  una soluzione di equilibrio per il sistema (6.15) ed  $U_{\mathbf{x}_e} \subset \mathbb{R}^n$  un intorno di  $\mathbf{x}_e$ ; sia  $\Lambda: U_{\mathbf{x}_e} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che gode di tutte le proprietà richieste dal (Teor.6.22) ed inoltre:

$$v) \quad \frac{d}{dt} \Lambda(\mathbf{x}) = \nabla \Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} F_i < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e} \setminus \{\mathbf{x}_e\}.$$

Allora  $\mathbf{x}_e$  è asintoticamente stabile.

In Fig.6.8 è mostrata la situazione descritta dal (Teor.6.24), nel caso  $n = 2$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

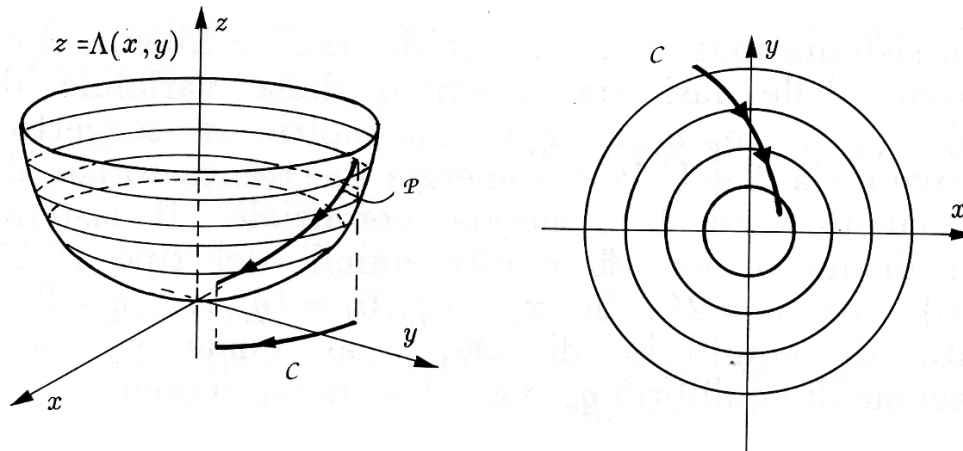


Fig. 6.8



(6.25) • *Esempio*: proviamo che l'origine del piano delle fasi è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione dell'oscillatore armonico con smorzamento lineare (1.17). Se scegliamo l'energia per unità di massa come funzione di Liapunov,

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2} x^2 ,$$

abbiamo che  $d/dt E(\mathbf{x}) \leq 0$ , e, quindi, possiamo provare solo la stabilità semplice. Se scegliamo, invece,  $\Lambda(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x})$ , dove:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [(\dot{x} + 2hx)^2 + \omega^2 x^2] ,$$

possiamo dimostrare che  $d/dt \Lambda(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e} \setminus \{\mathbf{x}_e\}$ , e, quindi, per il (Teor.6.24), l'asintotica stabilità dell'origine. Infatti:

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{x}) = -2h\omega^2 x^2$$

e, di conseguenza:

$$\frac{d}{dt} \Lambda(\mathbf{x}) = -2h(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) < 0 . \quad \bullet$$