



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

DIMAI
DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA E INFORMATICA
"ULISSE DINI"

A.A 2016/2017

Versione 0.5

Giovanni Borgioli ¹

METODI MATEMATICI



¹Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" - Università degli Studi di Firenze, via di S. Marta 3, e-mail: giovanni.borgioli@unifi.it

Nel riquadro di copertina sono riportati, dall'alto a sinistra in senso orario, i ritratti di Jean Baptiste Joseph Fourier, Augustin-Louis Cauchy, Peter Gustav Lejeune Dirichlet e David Hilbert.

Capitolo 1

Equazioni differenziali ordinarie

1.1 Notazioni e definizioni

Sia $f = f(x)$ una funzione reale di variabile reale .

Le sue derivate (dalla prima a quella di generico ordine n) saranno indicate come:

$$f', f'' \dots, f^{(n)},$$

oppure (notazione secondo Leibniz) ¹ :

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Se la funzione f rappresenta una grandezza che dipende dal tempo utilizzeremo il simbolo t al posto di x e (fino alla derivata seconda) la notazione di Newton ² :

$$f' := \dot{f}, f'' := \ddot{f}.$$

DEFINIZIONE 1.1 1) *Equazioni differenziali ordinarie (EDO) sono equazioni in cui compare una funzione incognita (**variabile dipendente**) di una sola variabile (**variabile indipendente**), insieme ad un certo numero (non nullo) di sue derivate. La sua forma più generale è quindi*

$$F(x; f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0. \quad (1.1)$$

¹Gottfried Wilhelm von Leibniz (in lat. Leibnitius, in passato francesizzato in Leibnitz; Lipsia, 1 luglio 1646 - Hannover, 14 novembre 1716) è stato un matematico, filosofo, scienziato, logico, glottoteta, diplomatico, giurista, storico, magistrato e bibliotecario tedesco.

²Sir Isaac Newton, fisico, matematico ed alchimista inglese (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 gennaio 1643 - Londra, 31 marzo 1727)

2) *Equazioni differenziali a derivate parziali (EDP) sono equazioni in cui la funzione incognita dipende da più variabili fra loro indipendenti e le derivate che compaiono nelle equazioni sono derivate parziali.*

3) *Se vi sono più funzioni incognite da determinare, allora è necessario un pari numero di equazioni differenziali (sia nel caso EDO che nel caso EDP). Si ha quindi un **sistema di equazioni differenziali**.*

4) *L'ordine di un'equazione differenziale (sia EDO che EDP) è dato dall'ordine della derivata di ordine massimo presente nell'equazione.*

5) *Considereremo in generale EDO in cui sia la funzione incognita che la variabile indipendente siano reali. Una **soluzione** di (1.1) sull'intervallo $a < x < b$ è una funzione $\phi(x)$ tale che*

$$F(x; \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

6) *Considereremo sempre equazioni del tipo (1.1) che siano esplicitabili rispetto alla derivata di ordine massimo, ovvero riconducibili alla forma*

$$f^{(n)} = \mathcal{F}(x; f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)). \quad (1.2)$$

*Equazioni nella forma (1.2) sono dette in **forma normale**.*

7) *EDO che non dipendono **esplicitamente** dalla variabile indipendente sono dette equazioni **autonome**.*

8) *Se la F in (1.1) è una funzione lineare di $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ allora l'equazione differenziale è un'**equazione lineare**. La sua forma più generale è quindi*

$$a_n(x)f^{(n)} + a_{n-1}(x)f^{(n-1)} + \dots + a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f(x) = g(x). \quad (1.3)$$

*Le EDO che non si presentano nella forma (1.3) sono dette **equazioni non lineari**.*

9) *Un'EDO lineare è detta **omogenea** se il termine noto $g(x)$ in (1.3) è identicamente nullo.*

10) *Un'EDO lineare (1.3) è autonoma se tutti i coefficienti a_k , $k = 0, \dots, n$ ed il termine noto $g(x)$ sono costanti. In questo caso l'EDO è definita come **equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**.*

11) Si definisce **soluzione generale** di un'equazione differenziale una famiglia di funzioni, dipendente da un certo numero N di parametri (N dipende dall'ordine dell'equazione) che, al variare dei parametri, contiene tutte le soluzioni dell'equazione.

12) Si definisce **soluzione particolare** di un'equazione differenziale una soluzione che non dipende da parametri.

13) Si potranno ottenere in numerosi casi soluzioni di un'EDO sotto la forma di **famiglia di funzioni** dipendenti da uno o più parametri, ma che non esauriscono tutte le soluzioni dell'equazione. In tal caso non si può ovviamente parlare di soluzione generale. Le soluzioni dell'equazione che non sono ottenibili dando dei valori particolari ai parametri e che rientrano nella definizione di soluzioni particolari, prendono il nome di **soluzioni singolari**.

1.2 EDO del I ordine a variabili separabili

$$y' = f(x)g(y) . \quad (1.4)$$

Se $g(y) \neq 0$, la (1.4) è equivalente a

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) . \quad (1.5)$$

Integrando ambo i membri di (1.5) rispetto ad x :

$$\int \frac{y' dx}{g(y)} = \int f(x) dx , \quad (1.6)$$

ovvero

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx . \quad (1.7)$$

Se esistono le primitive, l'equazione (1.5) risulta integrabile e la soluzione è ottenuta in forma implicita:

$$G(y) = F(x) + C , \quad (1.8)$$

dove

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} , \quad F(x) = \int f(x) dx \quad (1.9)$$

e C è la costante arbitraria che nasce dall'integrazione. Si può ottenere una soluzione esplicita (ed eventualmente in una restrizione del dominio di esistenza) solo se la funzione G risulta invertibile.

In questo caso la soluzione esplicita si scrive formalmente come

$$y = G^{-1}(F(x) + C) , \quad (1.10)$$

dove con G^{-1} si intende la funzione inversa di G .

1.3 EDO del I ordine di tipo omogeneo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) . \quad (1.11)$$

La funzione f al secondo membro dipende dalle variabili x (indipendente) ed y (dipendente), esclusivamente tramite il loro rapporto.

Le equazioni differenziali del tipo (1.11) sono dette **equazioni differenziali del primo ordine di tipo omogeneo** e sono riconducibili ad equazioni

differenziali a variabili separabili con un opportuna sostituzione:

$$z = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \quad \implies \quad y = xz \quad \implies \quad y' = xz' + z \quad (1.12)$$

Dopo la sostituzione in (1.11):

$$xz' + z = f(z), \quad (1.13)$$

che è un'equazione a variabili separabili

$$\frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(z) \neq z. \quad (1.14)$$

La soluzione (in forma implicita o esplicita) per la (1.11) si ottiene dalla soluzione della (1.14) tornando alla variabile y .

1.4 EDO del I ordine lineari

La forma più generale di equazione differenziale lineare del I ordine è la seguente:

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0. \quad (1.15)$$

Le funzioni a, b, c in (1.15) sono funzioni note della variabile indipendente x ed hanno almeno un intervallo aperto in comune fra i loro domini di definizione. In generale supporremo che esse siano almeno funzioni continue.

OSSERVAZIONE 1.1 Le EDO che trattiamo devono poter essere espresse in **forma normale**. Perché la (1.15) sia in forma normale occorre dividere ambo i membri per $a(x)$:

$$y' = -\frac{b(x)}{a(x)}y - \frac{c(x)}{a(x)}. \quad (1.16)$$

Questo è sempre possibile a patto di escludere dal dominio della soluzione i punti in cui $a(x) = 0$. Si osservi, d'altra parte, che quando $a(x) = 0$ la (1.15) perde di significato, in quanto non è più un'equazione differenziale.

Consideriamo la seguente come forma generale per l'EDO lineare del I ordine:

$$y' + p(x)y = r(x), \quad (1.17)$$

dove

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{e} \quad r(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}$$

sono funzioni continue almeno su un intervallo aperto.

La forma (1.17) è detta **completa**, mentre quando $r(x) \equiv 0$ l'equazione è detta **incompleta**. In questo caso la (1.17) è immediatamente integrabile per variabili separabili:

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad \Longrightarrow \quad \log |y| = - \int p(x) dx + C . \quad (1.18)$$

La soluzione è dunque

$$y = \mathcal{C} e^{-\int p(x) dx} , \quad \text{dove } \mathcal{C} = e^C . \quad (1.19)$$

La soluzione dell'equazione completa (1.17) non può essere trovata con il metodo della separazione delle variabili, ma occorre utilizzare un **fattore integrante**.

Osserviamo che:

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x) dx} \right) = y' e^{\int p(x) dx} + p(x) y e^{\int p(x) dx} . \quad (1.20)$$

Possiamo utilizzare $e^{\int p(x) dx}$ come fattore integrante per l'equazione (1.17). Moltiplichiamo entrambi i membri di (1.17) per $e^{\int p(x) dx}$ ed otteniamo

$$y' e^{\int p(x) dx} + p(x) y e^{\int p(x) dx} = r(x) e^{\int p(x) dx} , \quad (1.21)$$

ovvero

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x) dx} \right) = r(x) e^{\int p(x) dx} , \quad (1.22)$$

Dall'integrazione immediata della (1.22) si ottiene

$$y e^{\int p(x) dx} = \int r(x) e^{\int p(x) dx} dx + C , \quad (1.23)$$

dalla quale si ricava la formula risolutiva che fornisce la soluzione generale dell'EDO lineare del primo ordine completa:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int r(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right] . \quad (1.24)$$

Osserviamo che la (1.24) può essere scritta anche come

$$y = C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int r(x) e^{\int p(x) dx} dx . \quad (1.25)$$

La soluzione dell'equazione completa (1.17) può essere vista come la somma della **soluzione generale** dell'equazione incompleta (1.19) (che dipende dal parametro C) e di una **soluzione particolare** (che non dipende da alcun parametro) che risolve la (1.17).

1.5 EDO del I ordine del tipo di Bernoulli

Vi sono alcune equazioni differenziali non lineari che, per sostituzione di variabile, sono riconducibili alle EDO lineari.

Di questo tipo sono le così dette equazioni di Bernoulli ³, che si presentano sotto la forma:

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, 1. \quad (1.26)$$

Si osservi che per $\alpha > 0$ esiste comunque la soluzione $y = 0$, mentre per un α reale generico occorre che sia $y > 0$. I coefficienti a, b in (1.26) sono funzioni almeno continue della variabile indipendente x .

La condizione $\alpha \neq 0, 1$ è posta perché in questi due casi la (1.26) si riduce rispettivamente al caso di EDO lineare incompleta ($\alpha = 1$) o completa ($\alpha = 0$).

Per risolvere la (1.26) si utilizza il fattore integrante $y^{-\alpha}$, per il quale si moltiplicano ambo i membri della (1.26):

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{(1-\alpha)} + b(x). \quad (1.27)$$

Introduciamo adesso il seguente cambiamento di variabile:

$$z = y^{(1-\alpha)} \implies z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'. \quad (1.28)$$

Sostituendo (1.28) in (1.27) si ottiene immediatamente un'EDO lineare del I ordine per la variabile dipendente z :

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x)$$

che, riscritta nella forma (1.17)

$$z' + (\alpha - 1)a(x)z = (1 - \alpha)b(x).$$

Ricorrendo alla (1.24)

$$z = e^{(1-\alpha) \int a(x)dx} \left[(1-\alpha) \int b(x)e^{(\alpha-1) \int a(x)dx} dx + C \right]. \quad (1.29)$$

La soluzione generale esplicita per la variabile dipendente y si ottiene per inversione della prima delle (1.28):

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (1.30)$$

³Jakob Bernoulli, matematico e scienziato svizzero (Basilea, 27 dicembre 1654 - Basilea, 16 agosto 1705)

1.6 Equazioni esatte

Consideriamo la seguente EDO del I ordine:

$$2xyy' + y^2 + 2x = 0 . \quad (1.31)$$

Si vede facilmente che non rientra in nessuno dei casi precedenti. Non è a variabili separabili né lineare né del tipo di Bernoulli né di tipo omogeneo.

Osserviamo però che se consideriamo la funzione

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2$$

le sue derivate parziali sono

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x + y^2 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy .$$

La (1.31) può essere riscritta nella forma seguente, che porta ad un'integrazione immediata:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2)y' = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0 ,$$

la cui soluzione (in forma implicita) è $x^2 + xy^2 = C$.

Consideriamo quindi equazioni della forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1.32)$$

e supponiamo che esista una funzione $\psi(x, y)$ tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) .$$

e che

$$\psi(x, y) = C \quad (1.33)$$

identifichi implicitamente una funzione $y = \phi(x)$, differenziabile, allora la (1.32) è un'equazione differenziale esatta, la cui soluzione è data implicitamente dalla (1.33).

Teorema 1.6.1 *Siano $M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ funzioni continue in una regione semplicemente connessa (ad esempio un rettangolo) di \mathbb{R}^2 , allora l'equazione differenziale*

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

è un'equazione differenziale esatta, se e solo se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.34)$$

in ogni punto della regione. Esiste cioè una funzione $\psi(x, y)$, tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$$

se e solo se M ed N soddisfano le (1.34).

Fattori di integrazione

Supponiamo che la

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (1.35)$$

non sia un'equazione esatta. Possiamo cercare una funzione $\varphi(x, y)$ tale che

$$\varphi(x, y)M(x, y) + \varphi(x, y)N(x, y)y' = 0 \quad (1.36)$$

sia un'equazione esatta. Dal Teorema 1.6.1 la (1.36) risulta esatta se e solo se

$$\frac{\partial M\varphi}{\partial y} = \frac{\partial N\varphi}{\partial x}$$

Effettuando le derivate si ottiene un'equazione a derivate parziali:

$$M\varphi_y - N\varphi_x + (M_y - N_x)\varphi = 0 \quad (1.37)$$

in generale non di facile soluzione. Se φ potesse essere scelta come funzione di una sola variabile (ad esempio la x) la (1.37) si ridurrebbe ad un'equazione differenziale ordinaria, del primo ordine, lineare:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\varphi .$$

Questo è possibile solo se $\frac{M_y - N_x}{N}$ è funzione della sola x . Analogo è il caso per la dipendenza dalla sola variabile y .

1.7 Il problema ai valori iniziali

Consideriamo una particella di massa m che si muove verticalmente nell'aria, sotto l'azione della forza peso.

Se “traduciamo” la II Legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ in un'equazione differenziale, assumendo come variabile dipendente la velocità v della particella, otteniamo un'EDO lineare del I ordine:

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda v + mg . \quad (1.38)$$

In (1.38) mg rappresenta la forza peso (si è scelto come positivo il verso della verticale discendente e $-\lambda v$ la forza di resistenza viscosa esercitata dall'aria. Dividiamo ambo i membri di (1.38) per m e poniamo $\frac{m}{\lambda} = \tau$ ($\frac{m}{\lambda}$ ha la dimensione di un tempo). La (1.38) può essere dunque riscritta come

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g . \quad (1.39)$$

Usando la formula risolutiva per le EDO del I ordine lineari, si ottiene facilmente la famiglia ad un parametro (∞^1 soluzioni):

$$v = \frac{mg}{\lambda} + Ce^{-\frac{t}{\tau}} , \quad (1.40)$$

Per individuare una particolare soluzione (che corrisponde ad un particolare lancio del grave) basta fissare un istante t_0 in cui assegnare il valore della velocità per individuare una ed una sola soluzione, i.e.

$$v(t_0) = v_0 . \quad (1.41)$$

La (1.41) prende il nome di condizione iniziale ed il problema costituito da (1.41)+(1.38) prende il nome di problema di Cauchy o di problema ai valori iniziali (PVI). In generale si possono dare le condizioni sufficienti per l'esistenza ed unicità della soluzione del PVI per mezzo del seguente teorema, noto come Teorema di Cauchy ⁴ :

Teorema di Cauchy 1.7.1 *Sia*

$$y' = f(x, y) , \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.42)$$

e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(I) $f(x, y)$ sia definita e continua rispetto ad i suoi argomenti in un rettangolo $D = [-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$, con $x_0 \in (-a, a)$ e $y_0 \in (-b, b)$;

(II) $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$ vale la disuguaglianza

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

⁴Augustin-Louis Cauchy, matematico e ingegnere francese (Parigi, 21 agosto 1789 - Sceaux, 23 maggio 1857)

dove L è una costante,⁵

allora esiste un intervallo $[-\delta + x_0, x_0 + \delta]$ nel quale esiste ed è unica la soluzione di (1.42), dove $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ e $M = \sup_{x,y \in D} |f(x,y)|$. Inoltre la soluzione y è il limite della successione (iterate di Picard⁶)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds ,$$

uniformemente nell'intervallo $[-\delta + x_0, x_0 + \delta]$.

PROVA:

1) Esistenza. Se integriamo ambo i membri dell'equazione (1.42) otteniamo

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (1.43)$$

L'ipotesi di continuità sulla funzione f in (1.42) garantisce l'equivalenza fra la (1.42) e l'equazione integrale (1.43), nel senso che se $y(x)$ è una soluzione della (1.42), continua con derivata prima continua (i.e. di classe \mathcal{C}^1), allora lo è anche della (1.43) e viceversa.

Costruiamo adesso una successione di “soluzioni approssimanti” (**iterate**

⁵La proprietà (II) è nota come proprietà di Lipschitzianità (da Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, matematico tedesco (nato a Königsberg il 14 maggio 1832 ed deceduto a Bonn il 7 ottobre 1903)) per la funzione f . La (II) è valida se si assume la più semplice, ma più restrittiva ipotesi che $f(x,y)$ sia derivabile con derivata parziale prima (rispetto ad y) continua in D . In questo caso, per il Teorema di Lagrange (Joseph-Louis Lagrange, nato Giuseppe Lodovico Lagrangia o ancora Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange, nato a Torino il 25 gennaio 1736 e morto a Parigi il 10 aprile 1813, è stato un matematico e astronomo italiano per nascita e formazione e attivo, nella sua maturità scientifica, per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi), vale $|f(x,y) - f(x,z)| \leq \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x,y=\bar{x},\bar{y}} |y - z|$ in un qualche punto $\bar{x}, \bar{y} \in D$. Per la continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ e ponendo $L = \sup_{x,y \in D}$ la proprietà segue immediatamente.

⁶Charles Émile Picard, matematico francese (Parigi, 24 luglio 1856 - Parigi, 11 dicembre 1941)

di Picard), che soddisfano tutte la condizione iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(x) \equiv y_0 \\ y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds \\ \dots\dots\dots \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \end{array} \right. \quad (1.44)$$

La successione risulta ben definita se ogni suo termine y_k resta nell'intervallo $[y_0 - b, y_0 + b]$, $\forall k$ e $\forall |x - x_0| \leq \delta$. A questo scopo cominciamo a studiare il primo passo:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds .$$

Poiché f è continua su D , y_1 è continua in $|x - x_0| \leq a$ e quindi in $|x - x_0| \leq \delta$. Vale inoltre la seguente stima:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \\ &\leq M \int_{x_0}^x ds \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b \end{aligned} \quad (1.45)$$

dove l'ultima disuguaglianza è evidentemente valida in entrambi i casi $a > \frac{b}{M}$ e $a < \frac{b}{M}$. I valori assunti da $y_1(x)$ restano quindi nell'intervallo $[y_0 - b, y_0 + b]$ se $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Procediamo adesso per induzione: supponiamo quindi che $y_{n-1}(x)$ sia continua su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e che $|y_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ in questo intervallo. Sotto queste ipotesi è immediato ottenere dalla (1.43) che $y_n(x)$ è continua sullo stesso intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e che

$$|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$$

Per il Principio di Induzione concludiamo che tutte le $y_n(x)$ sono continue nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e che i loro valori cadono in $[y_0 - b, y_0 + b]$.

Proviamo adesso che la successione $\{y_n(x)\}$ è uniformemente convergente su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Per l'iterata di ordine $n=2$ abbiamo

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds,$$

quindi possiamo costruire le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0)| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_0| ds \leq LM \int_{x_0}^x |s - x_0| ds \\ &\leq LM \frac{|x - x_0|^2}{2!} \leq M \frac{L\delta^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Con procedimento del tutto analogo si ottiene la stima per l'iterata successiva:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq L^2 M \frac{|x - x_0|^3}{3!} \leq M \frac{L^2 \delta^3}{3!}.$$

La struttura delle disuguaglianze trovate suggerisce di procedere nuovamente per induzione. Infatti se proviamo che se vale la disuguaglianza

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L^{n-1} M \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq M \frac{L^{n-1} \delta^n}{n!} \quad (1.47)$$

allora segue che

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{L^n \delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

per il Principio di Induzione possiamo affermare che la (1.47) vale per tutta la successione.

In effetti, utilizzando la (1.47) si ottiene

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds \leq L \int_{x_0}^x M \frac{L^{n-1} |s - x_0|^n}{n!} ds \\ &= M \frac{L^n |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{L^n \delta^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Questo prova la validità generale della (1.47), che riscriveremo nella forma seguente

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{L^n \delta^n}{n!} \quad (1.49)$$

Osserviamo adesso che

$$y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) ,$$

il che implica che la successione $\{y_n(x)\}$ e la serie

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x)) \quad (1.50)$$

hanno le stesse proprietà di convergenza.

Dalla (1.49) segue che la serie (1.50) converge totalmente e, quindi, uniformemente nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ad una funzione $y(x)$ continua. Inoltre, per la Lipschitzianità della funzione $f(x, y)$ (i.e. $|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq L |y_n(x) - y(x)|$), avremo anche che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x)) .$$

uniformemente su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Per le proprietà di uniforme convergenza sopra provate e passando al limite nell'equazione approssimante di ordine n , si ottiene l'esistenza di una soluzione continua sull'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ per l'equazione integrale (1.43) e, quindi, per il Problema ai Valori Iniziali (1.42):

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \right\} \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f\left(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)\right) ds = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds . \end{aligned}$$

2) Unicità. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione $z(x)$ del PVI (1.42), che sia diversa da $y(x)$ almeno in un punto $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, i.e. $z(\bar{x}) \neq y(\bar{x})$. Tuttavia, se $z(x)$ è soluzione di (1.42) (e quindi di (1.43)):

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, z(s)) ds ;$$

sotto le ipotesi del Teorema, analogamente a quanto ottenuto nella dimostrazione di esistenza della soluzione, si prova facilmente che vale

$$|z(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq M\delta , \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] .$$

Procedendo con i passi successivi si ottiene ancora che

$$|z(x) - y_n(x)| \leq L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{L^n \delta^{n+1}}{(n+1)!} , \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] . \quad (1.51)$$

Ma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n \delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z(x) - y_n(x)| = |z(x) - y(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

e l'unicità della soluzione risulta provata. ■

E' interessante notare che, una volta provata l'unicità della soluzione, la disuguaglianza (1.51) fornisce una stima maggiorante dell'errore che si commette prendendo come approssimazione della soluzione l'iterata di ordine n della successione di Picard.

Le condizioni del teorema possono essere attenuate per quanto riguarda il punto (II), ma questo richiederebbe l'introduzione di definizioni e proprietà che esulano dall'ambito di questo corso.

CONTROESEMPIO 1.1 Si noti che la condizione (I) da sola non garantisce l'unicità della soluzione (condizione di esistenza di Peano ⁷):

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0; \tag{1.52}$$

Integrando per separazione di variabili si ottiene la soluzione

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C; \tag{1.53}$$

la funzione che risolve (1.52) è quindi

$$y = \frac{x^3}{27}, \tag{1.54}$$

ma anche $y \equiv 0$ è soluzione di (1.52).

Il problema (1.52) non soddisfa la condizione (II) del Teorema (1.7.1), perché la funzione $y^{\frac{2}{3}}$ non è Lipschitziana in intervalli che contengano $y = 0$.

⁷Giuseppe Peano, matematico e logico italiano (Spinetta di Cuneo, 27 agosto 1858 - Torino, 20 aprile 1932)

1.8 Modelli matematici

Un modello matematico è una formulazione in termini (linguaggio) matematici di fenomeni reali. Con fenomeno reale indichiamo una manifestazione rilevabile dai nostri sensi, già osservata e descritta in termini verbali (logos). Scienze come la Fisica sono completamente rappresentate per mezzo di modelli matematici, così come vasti settori della Chimica e dell'Ingegneria. Biologia, Epidemiologia, Economia, Sociologia, Demografia, Urbanistica, etc... ricorrono sempre più spesso alla modellizzazione matematica. Per costruire un modello matematico occorre che siano individuate delle grandezze misurabili, o, in ogni caso, alle quali sia associabile una valutazione quantitativa (cioè si possa attribuirvi uno o più valori numerici, a seconda della sua natura scalare, vettoriale, tensoriale), che rappresentino lo "stato" del sistema. Si ipotizza poi che queste grandezze siano legate fra loro secondo leggi che possono essere "fenomenologiche" (descrittive) rispetto al fenomeno oppure "concettuali", nel senso che tentano di descrivere dei meccanismi più profondi e quindi nascosti del fenomeno stesso. In queste leggi formulate matematicamente appariranno come parametri delle grandezze da considerare note e quindi pensate misurabili a priori o determinabili a posteriori dall'osservazione del fenomeno. Nel nostro caso siamo interessati a modelli matematici che siano rappresentati da equazioni differenziali ordinarie.

Modelli matematici per EDO del I ordine

Consideriamo i due modelli fondamentali per la teoria delle popolazioni. Il primo, e più semplice, problema che affronteremo (modello malthusiano) ha origine nelle teorie demografiche dell'economista inglese R.T. Malthus⁸ sulla velocità di crescita della popolazione umana, ma è stato poi largamente utilizzato in modelli biologici (sviluppo di popolazioni di batteri o di organismi elementari) ed ecologici (evoluzione di popolazioni di animali "superiori"). Il secondo modello (modello logistico) costituisce una correzione del primo, particolarmente importante quando si vogliono fare previsioni di crescita di una popolazione su tempi abbastanza lunghi; anche esso, formulato nel 1837 dal matematico belga Verhulst⁹ come modello demografico, trova vastissimo impiego in ambito biologico, ecologico ed in numerosi altri settori scientifici.

Modello Malthusiano

⁸Thomas Robert Malthus, economista e demografo inglese (Roocherry, 13 febbraio 1766 - Bath, 23 dicembre 1834) .

⁹Pierre François Verhulst, matematico e statistico belga (Bruxelles, 28 ottobre 1804 - Bruxelles, 15 febbraio 1849) .

Consideriamo una popolazione, composta dal numero di individui x , per ipotesi dipendente solo dal tempo e non dalla posizione; questa assunzione, che varrà anche per il modello successivo, implica il ritenere la disposizione sul “territorio” della popolazione stessa (e le eventuali “migrazioni”) ininfluente sull’evoluzione del numero di individui. Se x è molto grande, la variazione di un’unità del numero di individui è molto piccola relativamente al numero stesso. Per popolazioni con un grande numero di elementi, possiamo dunque approssimare l’andamento “a salti” del numero di individui $x \in \mathbb{N}$ con un’equazione differenziale di evoluzione per la funzione $x(t) \in \mathbb{R}$, considerata derivabile con continuità rispetto al tempo.

Sia $a = a(x, t)$ la differenza fra il tasso di nascita e quello di morte; se consideriamo la popolazione isolata (non ci sono flussi migratori con l’esterno) e con una quantità illimitata di “risorse” a disposizione (non c’è competizione), il PVI per x è dato da:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad x(0) = x_0, \quad (1.55)$$

dove a , nei modelli più semplici è considerato costante, ed il dato iniziale è scelto positivo per il suo ovvio significato ($x_0 > 0$).

La soluzione di (1.55) è immediatamente ottenibile ed ha un andamento di tipo esponenziale:

$$x = x_0 e^{at}. \quad (1.56)$$

Nel caso di popolazioni con tasso di crescita positivo ($a > 0$), la (1.56) “annuncia” un numero infinito di individui, come tendenza asintotica.

Questo risultato mette in luce il fatto che il modello malthusiano non può essere molto efficace su tempi lunghi e che deve essere corretto quando il numero di individui x cresce oltre certi valori.

Ricordiamo comunque l’eccellente accordo fra le previsioni ottenute per la crescita della popolazione umana su scala mondiale ed i dati demografici “sperimentali” nel periodo 1700-1961. Le previsioni sull’evoluzione successiva vanno corrette tenendo conto della quantità sempre più limitata delle risorse, introducendo, quindi un termine di competizione interna fra i membri della popolazione.

Modello logistico

Il modello malthusiano per l’evoluzione di una popolazione cessa di fornire previsioni corrette quando il numero di individui diventa troppo grande. In questa situazione, lo “spazio vitale” a disposizione si restringe ed occorre introdurre un termine che tenga conto della competizione per le risorse necessarie alla crescita (ad esempio il cibo), non più considerabili come illimitate.

Se si ipotizza che la competizione abbia luogo quando due individui si incontrano, tale termine può essere considerato come proporzionale alla media statistica, per unità di tempo, del numero di incontri fra due elementi della popolazione, cioè proporzionale ad x^2 . Con questa correzione il PVI per la popolazione x diviene:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad (1.57)$$

dove a e b (costanti) sono detti coefficienti di vitalità e, in generale, $b \ll a$. La (1.56) può essere facilmente integrata per separazione di variabili, ottenendo:

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a\xi - b\xi^2} = \int_0^t d\tau = t. \quad (1.58)$$

Per integrare il termine a sinistra si procede fattorizzando il denominatore della funzione razionale fratta:

$$\frac{1}{a\xi - b\xi^2} = \frac{A}{\xi} + \frac{B}{a - b\xi}$$

ed imponendo:

$$A(a - b\xi) + B\xi = 1;$$

si ottengono così i valori di A e B cercati:

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{b}{a}.$$

Per l'integrale cercato in (1.58) abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a\xi - b\xi^2} &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi} + \frac{b}{a} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a - b\xi} \\ &= \frac{1}{a} \left[\log \frac{x}{x_0} + \log \frac{a - bx_0}{a - bx} \right] = \frac{1}{a} \log \frac{x(a - bx_0)}{x_0(a - bx)}. \end{aligned}$$

Introducendo questo risultato nella (1.58) e passando alle funzioni inverse, si ottiene la soluzione esatta della (1.57):

$$x = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}}. \quad (1.59)$$

Possiamo analizzare l'andamento della (1.59), mettendo in luce i seguenti punti:

Comportamento asintotico.

È immediato verificare che, per qualunque scelta di x_0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \frac{a}{b};$$

questo significa che il modello prevede un numero limite per la popolazione e che tale numero è calcolabile dai coefficienti di vitalità.

Crescita monotona.

Consideriamo il caso $x_0 < \frac{a}{b}$; allora la $x(t)$ espressa da (1.59) è una funzione monotona strettamente crescente $\forall t > 0$.

Convessità e concavità.

Derivando l'equazione (1.57), si ottiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a - 2bx) \frac{dx}{dt} = x(a - bx)(a - 2bx);$$

quindi, se $x_0 < \frac{a}{2b}$ segue che $\frac{d^2x}{dt^2} > 0, \forall t \in (0, t_1)$, dove t_1 è l'istante per cui $x(t_1) = \frac{a}{2b}$, e $x(t)$ è **convessa**; $\forall t > t_1$, ovvero per $\frac{a}{2b} < x < \frac{a}{b}$, invece, $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$, e $x(t)$ è concava. Per $x_0 > \frac{a}{b}$ è immediato verificare che la funzione $x(t)$ è sempre monotona decrescente e convessa.

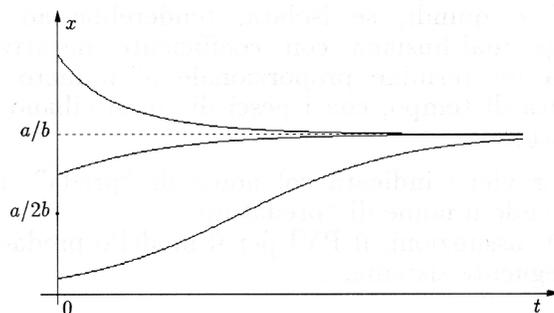


Figura 1.1

1.9 EDO del II ordine

Considerazioni generali

EDO del II ordine in forma normale si presentano nel modo seguente:

$$y'' = f(y, y', x). \quad (1.60)$$

Se f è una funzione non lineare nei suoi argomenti y, y' non ci sono, in generale, formule risolutive. Vi sono però dei casi in cui la (1.60) può essere ricondotta ad un'equazione del I ordine.

Caso I. Se la (1.60) è della forma

$$y'' = f(y, y')$$

può essere ricondotta ad un'EDO del I ordine con la sostituzione $z = y'$. Infatti

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z = z' z . \quad (1.61)$$

Sostituendo nell'equazione

$$z' z = f(z, y) \quad \Longrightarrow \quad z' = \frac{f(z, y)}{z} := g(z, y) .$$

Quest'ultima è un'EDO del I ordine, generalmente non lineare, dove y figura come variabile indipendente. Se è risolvibile, la soluzione sarà della forma

$$z = z(y, C) ,$$

con C costante arbitraria. Ritornando alla variabile originaria:

$$y' = z(y, C) ,$$

che è risolvibile per separazione di variabili.

Caso II. Se la (1.60) è della forma

$$y'' = f(y', x)$$

può essere ricondotta ad un'EDO del I ordine con la sostituzione $z = y'$. Infatti da (1.61) si ottiene

$$z' = f(z, x)$$

che, se riusciamo ad ottenere una soluzione esplicita $z = z(x, C)$, può essere ulteriormente integrata, dando luogo alla soluzione cercata:

$$y(x) = \int z(x, C) dx + C' .$$

Caso III. Se la (1.60) è della forma

$$y'' = f(y) \quad (1.62)$$

può essere ricondotta ad un'EDO del I ordine integrando per “quadrature. Se si moltiplicano ambo i membri di (1.63) per y' si ottiene

$$y''y' = f(y)y' \quad (1.63)$$

che, integrati ambo i membri rispetto ad x , porta all'EDO **non lineare** del I ordine

$$\frac{y'^2}{2} = F(y) + C ,$$

dove $F(y) = \int f(y)dy$.

NOTA

Equazioni del tipo (1.63) possono nascere in Meccanica (ricordare che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, “produce EDO del II ordine) e in Elettrologia (circuiti elettrici). Esse descrivono **sistemi conservativi**, sistemi, cioè in cui si conserva l'energia totale (o una grandezza ad essa correlata). Il termine $\frac{y'^2}{2}$ ne esprime infatti la parte “cinetica e $F(y)$ la parte “potenziale.

1.10 EDO lineari del II ordine

La forma generale di un'EDO lineare del II ordine è la seguente:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) . \quad (1.64)$$

La (1.64) è un'EDO del II ordine lineare **completa** (in quanto combinazione lineare tramite funzioni note della variabile indipendente x di tutte le derivate della funzione incognita y dall'ordine 0 all'ordine massimo 2) e **non omogenea** (in quanto presenta la funzione $g(x)$ al secondo membro; se $g(x) \equiv 0$ si dirà che la (1.64) è omogenea) e non autonoma per la presenza di funzioni che dipendono esplicitamente dalla x .

La (1.64) non è, però, in forma normale, che si ottiene formalmente dividendo ambo i membri per $a(x)$:

$$y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x) , \quad (1.65)$$

dove $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a(x)}$. È evidente che la (1.65) è equivalente alla (1.64) solo se $a(x) \neq 0$. Diamo adesso alcuni risultati fondamentali che riguardano le EDO lineari del II ordine (complete) nella forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) , \quad (1.66)$$

ed omogenee

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 , \quad (1.67)$$

dove le funzioni $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ sono continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$.

A questo scopo consideriamo una visione un po' più "astratta" del trattamento delle EDO lineari del II ordine (che si può generalizzare alle EDO lineari di ordine n) introducendo metodi derivanti dall'algebra lineare (spazi vettoriali).

Se consideriamo l'insieme delle funzioni reali definite su di un generico intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e dotiamo l'insieme delle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare (numero) costruiamo uno spazio vettoriale¹⁰, che indichiamo con $\mathbf{V}(I)$. Se ci limitiamo a considerare le funzioni continue su I , allora costruiamo lo spazio vettoriale delle funzioni continue su I , perché le operazioni introdotte preservano la continuità¹¹. Indicheremo questo spazio con $\mathcal{C}(I)$. Ovviamente $\mathcal{C}(I)$ è un sottospazio proprio di $\mathbf{V}(I)$, i.e. $\mathcal{C}(I) \subset \mathbf{V}(I)$. In generale, se dall'insieme delle funzioni definite su I scegliamo quelle che hanno una proprietà invariante rispetto alle operazioni introdotte (addizione e moltiplicazione per uno scalare), questi sottoinsiemi costituiscono dei sottospazi vettoriali dello spazio $\mathbf{V}(I)$. Ad esempio, le funzioni integrabili su I costituiscono uno spazio vettoriale, così come le funzioni derivabili. Le funzioni derivabili con derivata prima continua costituiscono lo spazio vettoriale $\mathcal{C}^1(I)$ e, ancora ovviamente, avremo $\mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}(I)$. Generalizzando ed indicando con $\mathcal{C}^n(I)$ le funzioni continue con derivata ennesima continua su I , avremo la catena di inclusioni proprie

$$\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{(n-1)}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}(I) .$$

Definiamo adesso come **operatore** un'applicazione univoca (quindi una funzione) fra due spazi vettoriali (o anche di uno spazio vettoriale in sé). Per esempio, se indichiamo con D l'operatore derivata prima e lo facciamo agire nello spazio $\mathcal{C}^1(I)$, esso avrà immagine in $\mathcal{C}(I)$, i.e.

$$D : \mathcal{C}^1(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I) , \quad D := \frac{d}{dx} .$$

Inoltre D è un **operatore lineare**, come consegue immediatamente dalla linearità della derivata:

$$D(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 D y_1 + \lambda_2 D y_2$$

¹⁰Per la definizione si veda il Cap.2.

¹¹Infatti se g è una funzione continua su I , anche λg è continua, dove $\lambda \in \mathcal{N}$ e dove \mathcal{N} rappresenta un generico campo numerico (ad esempio \mathbb{R} o \mathbb{C}). Ugualmente se g_1 e g_2 sono funzioni continue su I , allora anche $g_1 + g_2$ è una funzione continua su I . È quindi immediato affermare che la combinazione lineare $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ è ancora una funzione continua ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{N}$).

Sono dunque operatori lineari (sui rispettivi spazi) tutti gli operatori definiti dalle derivate di qualunque ordine:

$$D^n : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I), \quad D^n := \frac{d^n}{dx^n}.$$

Definiamo adesso l'operatore

$$L : \mathcal{C}^2(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I), \quad L := D^2 + p(x)D + q(x). \quad (1.68)$$

La 1.66 può essere riscritta nella forma

$$Ly = f. \quad (1.69)$$

e la (1.67) nella forma

$$Ly = 0. \quad (1.70)$$

Soluzione generale, PVI e Wronskiano

Teorema 1.10.1 *Siano y_1 e y_2 due soluzioni della (1.70) con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$; allora ogni funzione della forma $y = C_1y_1 + C_2y_2$ è soluzione della (1.70) su I . Inoltre, ogni soluzione della equazione completa (1.69) si può scrivere come somma di una soluzione dell'equazione omogenea (1.70) e di una soluzione particolare della equazione completa (1.69).*

Prova: La prova è immediata e si ottiene introducendo la $y = C_1y_1 + C_2y_2$ nell'equazione (1.70) e sfruttandone le proprietà di linearità.

Anche la seconda parte del Teorema segue facilmente dalle proprietà di linearità dell'operatore L . Infatti, se y^* è una soluzione della (1.69) e y_{om} una soluzione della (1.70), segue immediatamente dalla linearità di L che $y_{om} + y^*$ è soluzione dell'equazione completa (1.69); viceversa se y^* e y^{**} sono due soluzioni dell'equazione completa (1.69), allora la loro differenza è soluzione dell'equazione omogenea (1.70)

$$y^{**} - y^* = y'_{om} \iff y^{**} = y^* + y'_{om}$$

e l'asserto è dimostrato. ■

Riportiamo adesso l'enunciato del Teorema di esistenza ed unicità per il PVI delle EDO lineari del II ordine. La sua validità può essere facilmente verificata dall'estensione (banale) alle EDO di ordine n qualunque (vedere il Paragrafo 1.15) del Teorema di Cauchy (1.7.1):

Teorema 1.10.2 *Il problema ai valori iniziali*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

dove $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ sono funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, ammette esistenza ed unicità di una soluzione y continua con derivate continue fino al secondo ordine su tutto l'intervallo I (i.e. $y \in C^2(I)$).

Teorema 1.10.3 *Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni della (1.67) con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia assegnato il problema ai valori iniziali in un punto $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ allora ogni funzione della forma $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ è soluzione del PVI associato alla (1.67) se e solo se il determinante Wronskiano ¹², definito da*

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. In tal caso le costanti C_1 e C_2 sono univocamente determinate in funzione dei dati iniziali y_0 e y'_0 .

Prova: Se imponiamo a $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ di soddisfare le condizioni iniziali otteniamo il seguente sistema di equazioni (algebriche) lineari non omogenee:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (1.71)$$

che è facilmente risolto con il metodo di Cramer ¹³:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](x_0)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](x_0)}.$$

La determinazione di C_1 e C_2 e quindi la soluzione del PVI è unica se e solo se $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$. ■

¹²da Josef Maria Hoene-Wroński, matematico, fisico e filosofo messianista polacco (Wolsztyn, 23 agosto 1776 - Neuilly-sur-Seine, 9 agosto 1853)

¹³Gabriel Cramer, matematico svizzero (Ginevra, 31 luglio 1704 - Bagnols-sur-Cze, 4 gennaio 1752).

Teorema 1.10.4 *Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni della (1.67) con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$; se $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ in un qualche punto $x_0 \in I$, allora la famiglia di soluzioni $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ è la soluzione generale dell'equazione (1.67).*

Teorema di Abel 1.10.5 *Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni della (1.67) con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ allora il Wronskiano $W[y_1, y_2](x)$ è dato da*

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} \quad (1.71)$$

dove $x_0 \in I$ è un qualunque punto dell'intervallo I .

Prova: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni della (1.67), allora

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Se moltiplichiamo la prima equazione per y_2 e la seconda per y_1 e poi sottraiamo la prima dalla seconda, otteniamo:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0.$$

Ma $(y_2'y_1 - y_1'y_2)$ è il Wronskiano e $y_2''y_1 - y_1''y_2$ la sua derivata rispetto ad x , come è immediato verificare. Quindi $W[y_1, y_2](x)$ deve soddisfare la seguente EDO del I ordine, lineare:

$$\frac{dW}{dx}[y_1, y_2](x) + p(x)W[y_1, y_2](x) = 0. \quad (1.72)$$

Se consideriamo un punto $x_0 \in I$, arbitrario, dove $W[y_1, y_2](x_0) = W_0$, la soluzione del PVI associato alla (1.72) si scrive come:

$$W[y_1, y_2](x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}. \quad (1.73)$$

La (1.73) afferma che il Wronskiano è identicamente nullo se è nullo in un punto, altrimenti se è diverso da zero in un punto allora lo è in tutto il dominio di definizione. ■

Indipendenza lineare di due funzioni

Definizione 1.10.6 *Due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$, definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, sono linearmente dipendenti se esistono due costanti k_1 e k_2 , non entrambe nulle, tali che*

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Altrimenti $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ son dette **linearmente indipendenti** su I .

Il legame esistente fra la precedente definizione e le proprietà del Wronskiano sono espresse nel seguente

Teorema 1.10.7 *I) Se due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$, definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed ivi differenziabili, ed il Wronskiano $W[f_1, f_2](x) \neq 0$ in un qualche punto $x_0 \in I$, allora $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono linearmente indipendenti su I .
II) Viceversa, se $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono linearmente dipendenti su I , allora $W[f_1, f_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$.*

Prova: I) Supponiamo che $W[f_1, f_2](x_0) \neq 0$, ma che $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ siano linearmente dipendenti su I . Quindi, in particolare, anche in x_0 dovrà annullarsi la combinazione lineare di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$, cioè

$$k_1 f_1(x_0) + k_2 f_2(x_0) = 0 \quad (1.74)$$

con k_1 e k_2 non entrambi nulli. La stessa condizione vale per la derivata di $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$:

$$k_1 f_1'(x_0) + k_2 f_2'(x_0) = 0. \quad (1.75)$$

Ma il determinante dei coefficienti per il sistema (1.74)+(1.75) è dato proprio dal Wronskiano in x_0 , che per ipotesi è diverso da zero. In conclusione le equazioni (1.74) e (1.75) possono essere soddisfatte solo se $k_1 = k_2 = 0$ e, di conseguenza, $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono linearmente indipendenti su I .

II) Supponiamo che $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ siano linearmente dipendenti su I e che $W[f_1, f_2](x) \neq 0$ in un qualche punto $x_0 \in I$. Ma, per la prima parte del teorema, quest'ultima ipotesi implica che $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ siano linearmente indipendenti su I , il che, contraddicendo la prima ipotesi, conclude la prova.

■

Esempio 1.10.8 *Consideriamo il caso delle funzioni $f_1 = |x|x$ e $f_2 = x^2$ nell'intervallo $(-1, 1)$. È facile verificare che il Wronskiano è definito su tutto l'intervallo e che $W[f_1, f_2](0) = 0$; tuttavia f_1 e f_2 sono linearmente indipendenti in $(-1, 1)$, perché non è possibile trovare una coppia di numeri k_1 e k_2 , tali che $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$.*

Osservazione 1.10.9 *Due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono linearmente dipendenti su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ se sono fra loro proporzionali.*

Nel caso che le funzioni considerate nel Teorema (1.10.7) siano soluzioni dell'equazione (1.67) (o (1.70)), il Teorema assume una forma più forte:

Teorema 1.10.10 *Condizione necessaria e sufficiente perché due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione (1.67) (o (1.70)) siano linearmente indipendenti è che il determinante Wronskiano $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ in I .*

Prova: Resta da provare che se $W[y_1, y_2](x) = 0$ in I , allora le soluzioni y_1, y_2 sono linearmente dipendenti. Ma se $W[y_1, y_2](x) = 0$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

ammette soluzioni non nulle, $C_1, C_2 \neq 0$. Possiamo allora costruire una soluzione $\phi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, che risolve il PVI $\phi(x_0) = 0, \phi'(x_0) = 0$ e, quindi, per l'unicità della soluzione è necessariamente $\phi(x) \equiv 0$. Questo prova che y_1, y_2 sono linearmente dipendenti. ■

Osservazione 1.10.11 Riassumendo, per trovare la soluzione generale di un'EDO del II ordine, lineare omogenea del tipo di (1.67), occorre procedere secondo i tre passi seguenti:

- 1) Trovare due funzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ che soddisfino la (1.67) sull'intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ dove $p(x)$ e $q(x)$ sono definite e continue.
- 2) Assicurarci che esista un punto $x_0 \in I$ dove $W[y_1, y_2](x) \neq 0$.
- 3) Allora $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ formano un **insieme fondamentale di soluzioni** e $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1 e C_2 costanti arbitrarie, è la **soluzione generale** della (1.67). Il PVI associato alla (1.67) può essere assegnato in ogni punto di I ed ammette sempre un'unica soluzione.

1.11 EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti

Iniziamo lo studio delle EDO lineari del secondo ordine da quelle omogenee a coefficienti costanti:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (1.77)$$

dove, appunto, a, b, c sono costanti.

Prima di affrontare il caso generale (1.77), consideriamo il seguente esempio:

$$y'' - y = 0. \quad (1.78)$$

È facile vedere che funzioni come e^x ed e^{-x} risolvono identicamente la (1.78). Per la linearità dell'equazione anche una qualunque funzione della forma

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (1.79)$$

ne è soluzione. Le (1.79) costituiscono una famiglia a due parametri (sono quindi ∞^2) di funzioni, che, come si può dimostrare, esprimono la soluzione generale di (1.79). Per ottenere un'unica soluzione si possono assegnare delle

condizioni iniziali come abbiamo fatto per le EDO del primo ordine. Le forme vettoriali (1.120) e (1.122) suggeriscono che la condizione debba essere data sulla funzione incognita y e sulla sua derivata prima y' per lo stesso valore della x . Ad esempio

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 . \quad (1.80)$$

Imponendo alla (1.79) queste condizioni si ottiene

$$C_1 + C_2 = 1 , \quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{cioè} \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \quad (1.81)$$

e la soluzione del PVI è univocamente determinata nella famiglia (1.79):

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) . \quad (1.82)$$

Consideriamo adesso il caso generale (1.77) e cerchiamo soluzioni del tipo $e^{\lambda x}$:

$$a \frac{d^2 e^{\lambda x}}{dx^2} + b \frac{de^{\lambda x}}{dx} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad (1.83)$$

che può essere risolta solo se è risolta l'equazione algebrica (detta **equazione caratteristica**)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.84)$$

che ammette in generale due soluzioni (reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.85)$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **reali**

Iniziamo la discussione a partire dal **caso** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **reali**.

È semplice vedere che la famiglia a due parametri $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ è soluzione della (1.77). Vediamo adesso se siamo in grado di risolvere il PVI per la (1.77) con $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$. Occorre quindi che

$$C_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_0 , \quad C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} = y'_0 . \quad (1.86)$$

La (1.86) costituisce un sistema di due equazioni algebriche lineari nelle incognite C_1 e C_2 , la cui soluzione è data da

$$\begin{cases} C_1 = \frac{y'_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 x_0} \\ C_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y'_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 x_0} . \end{cases} \quad (1.87)$$

Il PVI è quindi risolto in modo unico, qualunque siano le condizioni iniziali assegnate, dato che $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **complessi coniugati**

Consideriamo adesso il caso in cui, ancora sotto l'ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$, le due radici dell'equazione caratteristica siano complesse coniugate.

Questo avviene se $b^2 - 4ac < 0$. Posto $\mu^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ le radici dell'equazione caratteristica si possono scrivere come

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\mu, \quad (1.88)$$

e posto $r = -\frac{b}{2a}$ la coppia di soluzioni fondamentali ottenute è

$$z_1(x) = e^{(r+i\mu)x}, \quad z_2(x) = e^{(r-i\mu)x}. \quad (1.89)$$

Le funzioni $z_1(x)$ e $z_2(x)$ sono però funzioni complesse. Possiamo costruire una coppia di soluzioni fondamentali reali con due opportune combinazioni lineari delle z_1, z_2 . Ricorrendo alle formule di Eulero ¹⁴

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \sin \mu x, \quad e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \sin \mu x$$

e definendo

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{rx} \cos \mu x, \quad y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = e^{rx} \sin \mu x$$

otteniamo il nuovo insieme di soluzioni fondamentali **reali** da utilizzare per costruire la soluzione generale dell'equazione:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ **reali e coincidenti**

Consideriamo adesso il caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le due radici dell'equazione caratteristica siano reali coincidenti.

Questo avviene se $b^2 - 4ac = 0$. Posto $\lambda = \frac{-b}{2a}$ una soluzione è, come immediatamente verificabile, $e^{\lambda x}$. Cerchiamo adesso una seconda soluzione,

¹⁴Leonhard Euler, matematico e fisico svizzero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783).

linearmente indipendente dalla prima, nella forma $u(x)e^{\lambda x}$. Calcoliamone le derivate:

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{\lambda x} + \lambda u e^{\lambda x} \\ y'' &= u''e^{\lambda x} + 2\lambda u'e^{\lambda x} + \lambda^2 u e^{\lambda x} . \end{aligned}$$

Introducendole nell'equazione (1.77) e dividendo per $e^{\lambda x}$ si ottiene

$$a(u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u) + b(u' + \lambda u) + cu = 0 . \quad (1.90)$$

Ricordando che $\lambda = -\frac{b}{2a}$ e che $b^2 - 4ac = 0$ avremo

$$2a\lambda u' + bu' = -bu' + bu' \equiv 0 \quad , \quad a\lambda^2 u + b\lambda u + cu = \frac{b^2}{4a}u - \frac{b^2}{2a}u + cu \equiv 0 \quad (1.91)$$

Quindi $u(x)$ deve risolvere la seguente equazione differenziale:

$$u'' = 0$$

di immediata risoluzione:

$$u' = A \quad \implies \quad u = Ax + B ,$$

dove A e B sono costanti arbitrarie.

Ne deduciamo che la funzione $xe^{\lambda x}$ è una soluzione della (1.77), linearmente indipendente da $e^{\lambda x}$. Queste due funzioni costituiscono quindi un insieme di soluzioni fondamentali e la soluzione generale della (1.77), nel caso di radici reali coincidenti, deve essere espressa nella forma

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} , \quad (1.92)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie.

1.12 EDO lineari del II ordine non omogenee

Consideriamo adesso equazioni del tipo

$$ay'' + by' + cy = f(x) , \quad (1.93)$$

dove $f(x)$ è una funzione continua definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. La (1.93) è un'EDO del II ordine, lineare a coefficienti costanti e **non omogenea**. Riportiamo i due seguenti teoremi che ci indicano la via della ricerca della soluzione generale per la (1.93).

Teorema 1.12.1 *Siano $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(x)$ due soluzioni della (1.93), allora la loro differenza $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea (1.94)*

$$ay'' + by' + cy = 0 , \quad (1.94)$$

che prende il nome di **equazione omogenea associata alla (1.93)**.

Prova: La prova è immediata e segue dalle proprietà di linearità dell'equazione omogenea (1.94). ■

Come abbiamo visto la (1.94) ammette sempre una soluzione generale nella forma $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, dove y_1, y_2 sono due soluzioni fondamentali e C_1, C_2 due costanti arbitrarie. pertanto se vale il Teorema 1.12.1 avremo necessariamente che anche la soluzione $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ è esprimibile nella forma $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, con un'opportuna scelta delle costanti arbitrarie. Vale quindi il seguente

Teorema 1.12.2 *La soluzione generale della (1.93) può essere sempre scritta come somma di una soluzione particolare della (1.93) e della soluzione generale della equazione omogenea associata (1.94), cioè:*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x) \quad (1.95)$$

dove y_1, y_2 sono due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea associata (1.94), C_1, C_2 due costanti arbitrarie e $y^*(x)$ una qualunque soluzione di (1.93), che viene detta **soluzione particolare**.

Prova: La prova segue immediatamente dal Teorema 1.12.1, ponendo $y = \Phi_1$ e $y^* = \Phi_2$. ■

Teorema 1.12.3 *Siano $\Phi_1(x)$ una soluzione dell'equazione*

$$ay'' + by' + cy = f(x) ,$$

e $\Phi_2(x)$ una soluzione dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = g(x) ,$$

allora la loro somma $\Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ è una soluzione dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = f(x) + g(x) ,$$

Prova: La prova è, come per il Teorema 1.12.1, immediata e segue dalle proprietà di linearità dell'equazione omogenea (1.94). ■

Osservazione 1.12.4 *Il Teorema 1.12.3 è, ovviamente, molto utile quando si deve cercare una soluzione particolare nel caso di un termine non omogeneo somma di varie funzioni. In tal caso basta cercare le soluzioni particolari per ciascuna delle funzioni addende (mantenendo naturalmente la stessa parte omogenea dell'equazione) e poi sommarle per avere la soluzione particolare cercata.*

Metodo dei coefficienti indeterminati

Il metodo più generale per risolvere la (1.93) è il cosiddetto “metodo di variazione delle costanti, che sarà proposto successivamente. Tuttavia, se $f(x)$ in (1.93) è di forma particolare, si può utilizzare il più semplice “metodo dei coefficienti indeterminati. Questo metodo è utilizzabile se la $f(x)$ ha una struttura che riproduce se stessa sotto derivazione. Questo avviene per funzioni come i polinomi algebrici, le funzioni armoniche (\sin, \cos), le funzioni esponenziali ed i loro prodotti.

- $f(x) = P_n(x)$

Se $f(x)$ è un polinomio algebrico di grado n , $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, dove i coefficienti a_i , $i = 0, \dots, n-1$ possono anche essere nulli, la soluzione particolare va cercata nella forma di un **polinomio completo dello stesso ordine n**:

$$y^*(x) = Q_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (1.96)$$

dove c_i , $i = 0, \dots, n$ sono i coefficienti da determinare in modo che $y^*(x)$ risolva l'equazione (1.93).

- $f(x) = Ae^{ax}$

Se e^{ax} non è soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1.93) la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y^*(x) = Ce^{ax} \quad (1.97)$$

dove C è il coefficiente da determinare in modo che $y^*(x)$ risolva la (1.93).

- $f(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Se $\cos kx$ e $\sin kx$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (1.93), la soluzione particolare $y^*(x)$ va cercata nella forma completa

$$y^*(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (1.98)$$

anche se uno fra i coefficienti A e B fosse nullo. I coefficienti C_1 e C_2 vanno determinati in modo che $y^*(x)$ risolva la (1.93).

- $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

La soluzione va cercata nella forma

$$y^*(x) = Q_n(x)e^{ax} \quad (1.99)$$

- $f(x) = P_n(x) \cos kx$

oppure

- $f(x) = P_n(x) \sin kx$

La soluzione, in entrambi i casi, va cercata nella forma

$$y^*(x) = Q_n^{(1)}(x) \cos kx + Q_n^{(2)}(x) \sin kx \quad (1.100)$$

dove $Q_n^{(1)}(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ e $Q_n^{(2)}(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, b_i, c_i , $i = 0, \dots, n$ sono i coefficienti da determinare in modo che $y^*(x)$ risolva l'equazione (1.93).

- $f(x) = P_n(x)e^{ax} \cos kx$

oppure

- $f(x) = P_n(x)e^{ax} \sin kx$

La soluzione, in entrambi i casi, va cercata nella forma

$$y^*(x) = e^{ax} (Q_n^{(1)}(x) \cos kx + Q_n^{(2)}(x) \sin kx) \quad (1.101)$$

dove $Q_n^{(1)}(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ e $Q_n^{(2)}(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, $b_i, c_i, i = 0, \dots, n$ sono i coefficienti da determinare in modo che $y^*(x)$ risolva l'equazione (1.93).

Osservazione 1.12.5 *Le soluzioni proposte in precedenza non sono adeguate nei casi in cui $y^*(x)$ risulti soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1.93).*

In questo caso la soluzione particolare si ottiene dalle precedenti moltiplicandole per x^s dove $s = 1, 2$, in modo che la soluzione particolare non sia soluzione dell'equazione omogenea associata. Precisamente, se $y^(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1.93) proveniente da una radice semplice dell'equazione caratteristica, allora la soluzione particolare va cercata moltiplicando $y^*(x)$ per x , se corrisponde ad una radice doppia, va moltiplicata per x^2 .*

Esempi:

(I) Consideriamo l'equazione

$$y'' + y = \sin x .$$

La soluzione particolare va cercata nella forma

$$y^*(x) = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) .$$

(II) Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^x .$$

La soluzione particolare va cercata nella forma

$$y^*(x) = Cx^2 e^x .$$

Metodo di variazione delle costanti

Nel caso in cui $f(x)$ in (1.93) non sia del tipo sopra considerato (polinomi, esponenziali, funzioni armoniche), la ricerca di una soluzione particolare va

effettuata con un metodo più generale, detto metodo di variazione delle costanti. Prima di tutto illustriamo il metodo con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = f(x), \quad (1.102)$$

dove $f(x)$ è una qualsiasi funzione continua su \mathbb{R} . L'equazione differenziale omogenea associata alla (1.102) ha come soluzione generale

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare di (1.102) nella forma

$$y^*(x) = u(x)e^x + v(x)e^{2x}. \quad (1.103)$$

dove $u(x)$ e $v(x)$ sono funzioni almeno di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, da determinare in modo che (1.103) risolva la ((1.102)). Calcoliamo le derivate di $y^*(x)$:

$$y^{*'}(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x + v'(x)e^{2x} + 2v(x)e^{2x}. \quad (1.104)$$

Possiamo cercare $u(x)$ e $v(x)$ imponendo che soddisfino la relazione

$$u'(x)e^x + v'(x)e^{2x} = 0 \quad \implies \quad v'(x) = -u'(x)e^{-x}. \quad (1.105)$$

Questa ipotesi semplifica la forma della derivata prima di $y^*(x)$, che diviene:

$$y^{*'}(x) = u(x)e^x + 2v(x)e^{2x}. \quad (1.106)$$

Di conseguenza la derivata seconda risulta

$$y^{*''}(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x + 2v'(x)e^{2x} + 4v(x)e^{2x}. \quad (1.107)$$

Sostituendo le (1.103), (1.106) e (1.107) nell'equazione (1.102), si perviene alla seguente equazione differenziale

$$u'(x)e^x + 2v'(x)e^{2x} = f(x), \quad (1.108)$$

che, tenendo conto dell'ipotesi (1.105) porta ad un'equazione differenziale del primo ordine per la funzione incognita u

$$u'(x) = -\frac{f(x)}{e^x}$$

di immediata integrazione formale

$$u(x) = -\int \frac{f(x)}{e^x} dx$$

e che una volta risolta permette anche la determinazione di $v(x)$.

Il caso generale

Supponiamo che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano due soluzioni fondamentali per l'equazione (1.66), che riportiamo qui sotto

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

con $p(x), q(x), f(x)$ funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare per l'equazione completa nella forma

$$y^*(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x). \quad (1.109)$$

La derivata prima di $y^*(x)$ è

$$y^{*'}(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y_2'(x). \quad (1.110)$$

Possiamo scegliere $u(x)$ e $v(x)$ in modo che

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = -u'(x)\frac{y_1(x)}{y_2(x)}, \quad (1.111)$$

Questa scelta semplifica il calcolo della derivata seconda, che risulta

$$y^{*''}(x) = u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + v'(x)y_2'(x) + v(x)y_2''(x). \quad (1.112)$$

Sostituendo le (1.109), (1.110) e (1.112) nella (1.66), poiché tutti i termini che sono moltiplicati per $u(x)$ e $v(x)$ (non derivate) risolvono l'equazione omogenea associata alla (1.66), quest'ultima si riduce alla

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (1.113)$$

e sostituendo in (1.113) la (1.111)

$$\frac{u'}{y_2(x)} (y_2(x)y_1'(x) - y_1(x)y_2'(x)) = f(x). \quad (1.114)$$

La $u(x)$ può essere quindi ottenuta integrando l'equazione differenziale del I ordine

$$u'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx$$

e, analogamente per la $v(x)$

$$v'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx,$$

dove $W[y_1, y_2](x)$ rappresenta il determinante wronskiano delle due soluzioni, non nullo per ipotesi.

Applicazione: battimenti

Consideriamo un'EDO lineare del II ordine, non omogenea, che ammette soluzioni di particolare interesse nelle applicazioni:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A_0 \cos \omega_0 t . \quad (1.115)$$

L'equazione può rappresentare un sistema meccanico conservativo (sistema elastico) o un circuito LC, soggetti ad un'azione esterna rappresentata dalla funzione armonica $\cos \omega_0 t$.

La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1.115) ha la forma

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t ,$$

mentre la soluzione particolare va cercata nella forma

$$x^*(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t ,$$

che, posta nell'equazione (1.115), permette di determinare i coefficienti a e b :

$$a = \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad , \quad b = 0 .$$

La soluzione generale di (1.115) è quindi

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t .$$

Risolviamo il problema ai valori iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$; otterremo per le costanti arbitrarie i valori

$$C_1 = -\frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad , \quad C_2 = 0 ,$$

e per la soluzione del problema ai valori iniziali

$$x(t) = \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t) . \quad (1.116)$$

Poniamo

$$\alpha = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\omega_0 - \omega}{2} ; \quad (1.117)$$

è immediato verificare che

$$\alpha + \beta = \omega_0 \quad , \quad \alpha - \beta = \omega .$$

La (1.116) può essere scritta come

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos(\alpha + \beta)t - \cos(\alpha - \beta)t) \\ &= \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} [\cos \alpha t \cos \beta t - \sin \alpha t \sin \beta t - \cos \alpha t \cos \beta t - \sin \alpha t \sin \beta t] \\ &= -2 \frac{A_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \alpha t \sin \beta t . \end{aligned}$$

Utilizzando le (1.117) la soluzione è

$$x(t) = \left(2 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right) \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t . \quad (1.118)$$

Se $\omega_0 \simeq \omega$ il termine in parentesi può essere interpretato come un'ampiezza periodica nel tempo e lentamente variabile rispetto al termine "veloce di periodo $T \simeq \frac{2\pi}{\omega}$ ".

Applicazione: risonanza**Figura 1.2**

Calcoliamo le derivate prima e seconda di $x^*(t)$:

$$\dot{x}^*(t) = (a \cos \omega t + b \sin \omega t) + t(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) ,$$

$$\ddot{x}^*(t) = 2(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) - t(a\omega^2 \cos \omega t + b\omega^2 \sin \omega t) ,$$

Sostituendole nell'equazione (1.119) possiamo determinare i coefficienti a e b della soluzione particolare $x^*(t)$:

$$a = 0 \quad , \quad b = \frac{A_0}{2\omega} .$$

La soluzione particolare è quindi

$$x^*(t) = \frac{A_0}{2\omega} t \sin \omega t ,$$

e la soluzione generale è

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A_0}{2\omega} t \sin \omega t ,$$

La soluzione è la combinazione lineare di un'oscillazione armonica limitata con un termine di ampiezza crescente linearmente nel tempo.

Se consideriamo il caso $\omega_0 = \omega$ l'equazione (1.115) prende la forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A_0 \cos \omega t . \quad (1.119)$$

La soluzione particolare va cercata nella forma

$$x^*(t) = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t) ,$$

poiché sia $\cos \omega t$ che $\sin \omega t$ sono soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata alla (1.119).

1.13 Forma vettoriale dell'EDO del II ordine

Consideriamo adesso la forma normale generale di un'EDO del II ordine

$$y'' = f(y, y', x) .$$

Tale equazione sarà in generale definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$; $x \in I$, con y, y', y'' aventi immagine in intervalli (o unione finita di intervalli) aperti di \mathbb{R} . Se operiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$y_1 := y, \quad y_2 := y',$$

la (1.60) può essere espressa come sistema di due EDO del I ordine:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(y_2, y_1, x) \end{cases} \quad (1.120)$$

Introducendo la funzione vettoriale (con dominio in $I \in \mathbb{R}$ ed immagine in \mathbb{R}^2)

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

la (1.120) può essere scritta nella forma vettoriale

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, x) \quad \text{dove} \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}, x) := \begin{pmatrix} y_2 \\ f(y_2, y_1, x) \end{pmatrix} . \quad (1.122)$$

La \mathbf{F} è dunque definita su un rettangolo (o unione finita di rettangoli) aperto di \mathbb{R}^3 ed ha immagine in \mathbb{R}^2 .

Dal procedimento sopra adottato si deduce che ogni EDO (in forma normale) di qualunque ordine n può essere scritta sotto forma di sistema di n equazioni (in forma normale) differenziali del I ordine, che quindi ammette una rappresentazione vettoriale del tipo (1.122) dove la \mathbf{F} sarà definita su un dominio aperto di \mathbb{R}^{n+1} ed avrà immagine in \mathbb{R}^n .

NOTA:

La possibilità di unificare il simbolismo per EDO e sistemi di EDO di qualunque ordine (in forma normale) ha conseguenze fondamentali anche sulla formulazione del teorema di esistenza ed unicità per il PVI, che può essere generalizzato dalla sua formulazione nel Teorema (1.7.1) al caso di ordine n qualunque.

1.14 EDO e sistemi di EDO di ordine n

Consideriamo un'EDO di ordine n , in forma normale:

$$y^{(n)} = F(y, y', \dots, y^{(n-1)}; x), \quad (1.123)$$

dove F è definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ed ha immagine contenuta in \mathbb{R} . Se le associamo un PVI dovremo farlo assegnando i valori della funzione y e delle sue derivate fino alla $n - 1$ -esima in uno stesso punto x_0 appartenente all'intervallo in cui può variare la variabile indipendente x , i.e.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.124)$$

È sempre possibile, analogamente a quanto visto nel paragrafo 1.14, ricondurre la (1.123) ad una forma equivalente come sistema di n equazioni del primo ordine (in forma normale), definendo:

$$y_1 := y, y_2 := y', \dots, y_n := y^{(n-1)}.$$

La 1.123 assume quindi la forma del sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{(n-1)} = y_n \\ y'_n = F(y_1, y_2, \dots, y_n; x). \end{cases} \quad (1.125)$$

Se introduciamo la funzione vettoriale (con dominio in $I_x \in \mathbb{R}$ ed immagine in \mathbb{R}^n)

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la (1.125) può essere scritta nella forma vettoriale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y}; x), \quad (1.126)$$

dove

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}; x) := \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ F(y_1, y_2, \dots, y_n; x) \end{pmatrix}$$

ed il valore iniziale (1.124) da associare all'equazione (1.126) viene espresso come

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 . \quad (1.127)$$

Come dovrebbe essere evidente dal procedimento adottato per costruire la (1.126), tale equazione rappresenta la forma generale che unifica EDO di qualunque ordine finito (purché in forma normale) e sistemi, composti da EDO in forma normale, anch'essi di ordine finito.

Riportiamo adesso l'enunciato (senza dimostrazione) del Teorema di Cauchy (Teorema di esistenza ed unicità locale) per il PVI associato ad un'EDO della forma (1.126). Come si vedrà, si tratta di una diretta generalizzazione dell'analogo teorema enunciato e dimostrato per il PVI delle EDO del I ordine (si veda il (1.7.1)).

Teorema di Cauchy 1.14.1 *Sia*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) , \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (1.128)$$

e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(I) $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ sia definita e continua rispetto ai suoi argomenti in un dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $D = \{x, \mathbf{y}, t.c. |x - x_0| < a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < b\}$;

(II) $\forall (x, \mathbf{y}_1), (x, \mathbf{y}_2) \in D$ vale la disuguaglianza

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

dove L è una costante, allora esiste un intervallo $[-\delta + x_0, x_0 + \delta]$ nel quale esiste ed è unica la soluzione di (1.128), dove $\delta = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ e $M = \sup_{x, \mathbf{y} \in D} \|\mathbf{F}(x, \mathbf{y})\|$. Inoltre tale soluzione, \mathbf{y} , è il limite della successione (iterate di Picard)

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{F}(s, \mathbf{y}_{n-1}(s)) ds ,$$

uniformemente nell'intervallo $[-\delta + x_0, x_0 + \delta]$. ■

Riportiamo anche l'enunciato di un teorema che garantisce esistenza ed unicità globali (cioè su tutto il dominio della $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$) per la soluzione del PVI (1.128).

Teorema 1.14.2 *Sia*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y}; x) , \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (1.129)$$

e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(I) $\mathbf{F}(\mathbf{y}; x)$ sia definita e continua rispetto ai suoi argomenti in un dominio $\Delta = [-a, a] \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$;

(II) $\forall (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in D$ vale la disuguaglianza

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{F}(x, \mathbf{z})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

dove L è una costante, in generale dipendente da M , dove $M = \sup_{x, \mathbf{y} \in \Delta} \|\mathbf{F}(\mathbf{y}, x)\|$;

(III) $\forall x \in [-a, a], \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esistono due costanti, $L_1, L_2 \geq 0$, t.c.

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y})\| \leq L_1 + L_2\|\mathbf{y}\|,$$

allora esiste ed è unica la soluzione del (1.129), in tutto l'intervallo $[-a, a]$.

1.15 EDO e sistemi lineari di EDO

Abbiamo visto nel paragrafo 1.14 che ogni EDO di ordine n , in forma normale, può essere scritta nella forma di un sistema di n equazioni del I ordine e, di conseguenza, come un'equazione del I ordine per una funzione incognita vettoriale $\mathbf{y}(x) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$. Questo significa che ogni equazione lineare di ordine n , del tipo

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1.130)$$

può essere ricondotta alla forma di un sistema di n equazioni differenziali lineari del primo ordine. Per semplicità consideriamo il caso di un'equazione omogenea ($f(x) \equiv 0$). Posto $y_1 := y, y_2 := y', y_n := y^{(n-1)}$, la (1.130) viene riscritta nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = -\frac{a_{n-1}(x)y_n + \dots + a_1(x)y_2 + a_0(x)y_1}{a_n(x)} \end{array} \right. \quad (1.131)$$

Introducendo la matrice $n \times n$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

La (1.131) è quindi rappresentabile come un'equazione differenziale lineare in \mathbb{R}^n

$$\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y} . \quad (1.132)$$

La matrice \mathbf{A} in (1.132) rappresenta un caso particolare rispetto ad una più generale matrice $n \times n$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dove gli elementi di \mathbb{A} possono essere funzioni della variabile indipendente x . La forma

$$\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y} . \quad (1.133)$$

è quindi rappresentativa sia per equazioni differenziali lineari di ordine n , che per sistemi di n equazioni differenziali lineari del I ordine.

Soluzione generale:

Analogamente a quanto abbiamo visto per le EDO lineari del I ordine, possiamo cercare la soluzione in \mathbb{R}^n nella forma $e^{\lambda x}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante. Poiché $\frac{d}{dx}e^{\lambda x}\mathbf{v} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{v}$, e $\mathbb{A}(e^{\lambda x}\mathbf{v}) = e^{\lambda x}\mathbb{A}\mathbf{v}$ la (1.153) si riduce all'equazione

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{v} , \quad (1.134)$$

ovvero alla ricerca degli autovalori e degli autovettori della matrice \mathbb{A} .

Riassumiamo qui i risultati principali, basati su nozioni elementari di algebra lineare.

Teorema 1.15.1 Per ogni autovettore \mathbf{v}_h di \mathbb{A} , corrispondente ad un autovalore λ_h , si ha una soluzione della (1.153) $\mathbf{y}_h = e^{\lambda_h x} \mathbf{v}_h$. Se \mathbb{A} possiede n autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti), allora $\mathbf{y}_h = e^{\lambda_h x} \mathbf{v}_h$, $h = 1, \dots, n$ sono n soluzioni di (1.153) linearmente indipendenti.

Inoltre, tutti gli n autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, corrispondenti ad n **distinti autovalori** sono linearmente indipendenti.

In entrambi i casi la **soluzione generale** della (1.153) ha la forma

$$\mathbf{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \mathbf{v}_n . \quad \blacksquare \quad (1.135)$$

Consideriamo adesso il caso in cui vi siano autovalori complessi di \mathbb{A} .

Lemma 1.1 Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ un autovalore complesso di \mathbb{A} , con autovettore corrispondente $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, allora $\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$ è una soluzione complessa di (1.153).

Inoltre, posto $\mathbf{y}(x) = \mathbf{w}(x) + i\mathbf{z}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ e $\mathbf{z}(x)$ sono entrambe soluzioni reali di (1.153).

Prova: La prova segue immediatamente dalla linearità dell'equazione (1.153). Osserviamo che la funzione a valori complessi $\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v} = e^{\alpha + i\beta x} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)$ può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) \\ &= e^{\alpha x} [(\mathbf{v}_1 \cos \beta x - \mathbf{v}_2 \sin \beta x) + i(\mathbf{v}_1 \sin \beta x + \mathbf{v}_2 \cos \beta x)] . \end{aligned} \quad (1.136)$$

Quindi, se $\lambda = \alpha + i\beta$ è un autovalore complesso di \mathbb{A} , con autovettore corrispondente $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, allora sia

$$\mathbf{w}(x) = e^{\alpha x} (\mathbf{v}_1 \cos \beta x - \mathbf{v}_2 \sin \beta x)$$

che

$$\mathbf{z}(x) = e^{\alpha x} (\mathbf{v}_1 \sin \beta x + \mathbf{v}_2 \cos \beta x)$$

sono soluzioni a valori reali della (1.153).

Autovalori non tutti distinti:

Se gli n autovalori della matrice \mathbb{A} non sono tutti distinti, allora \mathbb{A} può non avere n autovettori distinti. Se supponiamo, ad esempio, che vi siano solo $m < n$ autovettori distinti, possiamo costruire solo m soluzioni linearmente indipendenti per la (1.153) della forma $e^{\lambda x} \mathbf{v}$. Occorre quindi costruire un metodo per ottenere le $n - m$ soluzioni (linearmente indipendenti) che mancano per costruire la soluzione generale dell'equazione (1.153).

Osserviamo che l'equazione scalare (cioè in \mathbb{R}) $y' = ay$ ammette come soluzione $y = e^{ax}$; può avere senso dire che $e^{x\mathbb{A}}$ è soluzione dell'equazione $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}$? Si tratta quindi di dare un significato all'esponenziale di una matrice, ricordando che in questo caso si tratta di una matrice quadrata $n \times n$. Questo può essere fatto facilmente ricordando la definizione della funzione esponenziale per mezzo della serie di potenze.

Definiremo quindi $e^{x\mathbb{A}}$ come

$$e^{x\mathbb{A}} := \mathbb{I} + x\mathbb{A} + \frac{x^2\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{x^n\mathbb{A}^n}{n!} + \dots \quad (1.137)$$

Le potenze di matrici quadrate sono operazioni ben definite, inoltre si può provare che la serie infinita (1.156) converge $\forall x$ e che può essere derivata termine a termine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^{x\mathbb{A}} &= \mathbb{A} + x\mathbb{A}^2 + \dots + \frac{x^n\mathbb{A}^{n+1}}{n!} + \dots \\ &= \mathbb{A} \left[\mathbb{I} + x\mathbb{A} + \frac{x^2\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{x^n\mathbb{A}^n}{n!} + \dots \right] = \mathbb{A}e^{x\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Questo significa che $e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v}$ è soluzione dell'equazione (1.153) per ogni vettore costante $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, poiché

$$\frac{d}{dx}(e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v}) = \mathbb{A}(e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v}). \quad (1.139)$$

Nota 1.1 La matrice esponenziale $e^{x\mathbb{A}}$ e la funzione scalare e^{ax} hanno molte proprietà in comune. Infatti valgono le proprietà

$$(e^{x\mathbb{A}})^{-1} = e^{-x\mathbb{A}} \quad e \quad e^{(x+x')\mathbb{A}} = e^{x\mathbb{A}}e^{x'\mathbb{A}}. \quad (1.140)$$

In generale, invece, la proprietà

$$e^{x(\mathbb{A}+\mathbb{B})} = e^{x\mathbb{A}}e^{x\mathbb{B}} \quad \text{vale solo se} \quad \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}. \quad (1.141)$$

In definitiva, per calcolare $e^{x\mathbb{A}}$ occorre calcolare la serie infinita (1.156). Tuttavia, in molti casi la (1.156) si può ricondurre ad una somma finita e, quindi, può essere sommata esattamente. In particolare, possiamo trovare n vettori linearmente indipendenti per i quali la (1.156) si riduce ad una somma finita. Inoltre, se conosciamo n soluzioni linearmente indipendenti di (1.153), allora è possibile sommare esattamente la (1.156). Osserviamo che

$$e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v} = e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}e^{x\lambda\mathbb{I}}\mathbf{v} \quad (1.142)$$

perché $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})(\lambda\mathbb{I}) = (\lambda\mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$, cioè commutano. Inoltre

$$e^{x\lambda\mathbb{I}}\mathbf{v} = \left[\mathbb{I} + x\lambda\mathbb{I} + \frac{x^2\lambda^2\mathbb{I}^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{v} = \left[1 + x + \frac{x^2\lambda^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{v} = e^{\lambda x} \mathbf{v} \quad (1.143)$$

e, quindi

$$e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v} = e^{\lambda x} e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}\mathbf{v}. \quad (1.144)$$

Osserviamo inoltre che se \mathbf{v} è tale che $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$ per un qualche intero m , allora $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{m+l} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ per ogni intero positivo l . Infatti

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{m+l} \mathbf{v} = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^l [(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^m \mathbf{v}] = \mathbf{0}. \quad (1.145)$$

Conseguentemente la serie che definisce $e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}$ si arresta al termine m -esimo ed abbiamo

$$e^{\lambda x} e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}\mathbf{v} = e^{\lambda x} \left[\mathbf{v} + x(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{m-1} \mathbf{v} \right]; \quad (1.146)$$

la serie, cioè, si riduce ad un polinomio.

Questo risultato suggerisce un metodo per trovare n soluzioni linearmente indipendenti della (1.153). Si devono trovare tutti gli autovalori e gli autovettori di \mathbb{A} . Se \mathbb{A} ha n autovettori linearmente indipendenti, allora l'equazione differenziale (1.153) ha n soluzioni linearmente indipendenti della forma $e^{\lambda x} \mathbf{v}$ (si osservi che la serie infinita $e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}\mathbf{v}$ finisce dopo un solo termine se \mathbf{v} è un autovettore di \mathbb{A} corrispondente all'autovalore λ).

Se \mathbb{A} ha solo $k < n$ autovettori linearmente indipendenti, allora abbiamo solo k soluzioni linearmente indipendenti per (1.153), della forma $e^{\lambda x} \mathbf{v}$. Per trovare soluzioni aggiuntive prendiamo un autovalore λ di \mathbb{A} e cerchiamo tutti i vettori \mathbf{v} per i quali $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ma $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Per ciascuno di questi vettori la serie infinita finisce dopo il secondo passo e per ciascuno di essi

$$e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v} = e^{\lambda x} e^{x(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})}\mathbf{v} = e^{\lambda x} [\mathbf{v} + x(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v}] \quad (1.147)$$

è una soluzione aggiuntiva di (1.153).

Se non abbiamo ancora abbastanza (ovvero n) soluzioni linearmente indipendenti, possiamo procedere oltre in modo analogo. Cerchiamo cioè tutti i vettori \mathbf{v} per i quali $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^3 \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ma $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^2 \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Per tali vettori

$$e^{x\mathbb{A}}\mathbf{v} = e^{\lambda x} \left[\mathbf{v} + x(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} + \frac{x^2}{2!} (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^2 \mathbf{v} \right] \quad (1.148)$$

è una soluzione aggiuntiva di (1.153). Procedendo in questo modo riusciamo ad ottenere n soluzioni linearmente indipendenti della (1.153) e, quindi, la sua soluzione generale.

In effetti un teorema di algebra lineare ci garantisce che il metodo funziona sempre e che possiamo sempre trovare n soluzioni linearmente indipendenti della (1.153). Infatti, gli autovalori della matrice \mathbb{A} si calcolano dall'equazione caratteristica $P_n(\lambda) = 0$ ed il Teorema fondamentale dell'algebra garantisce che tale equazione ammette sempre n radici (reali o coppie di complesse coniugate), in generale non tutte distinte. L'equazione caratteristica può essere quindi fattorizzata in un prodotto di binomi, cioè nella forma

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} = 0 \quad (1.149)$$

con $n_1 + \dots + n_k = n$ e dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di \mathbb{A} di rispettiva molteplicità n_1, \dots, n_k . Se ad un generico autovalore λ_j corrispondono solo $m_j < n_j$ autovettori, si può dimostrare che esiste un numero intero r_j , $m_j < r_j \leq n_j$ tale che l'equazione $(\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{I})^{r_j} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ammetta almeno n_j soluzioni linearmente indipendenti. In questo modo, per ogni autovalore λ_j possiamo calcolare n_j soluzioni linearmente indipendenti della (1.153), della forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda_j x} \left[\mathbf{v} + x(\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{I})\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{r_j-1}}{(r_j-1)!} (\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{I})^{r_j-1} \mathbf{v} \right]. \quad (1.150)$$

1.16 Matrice fondamentale di soluzioni

Siano $\mathbf{y}^1(x), \mathbf{y}^2(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$ n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$\mathbf{y}' = \mathbb{A}(x)\mathbf{y}, \quad (1.151)$$

allora ogni soluzione della (1.153) può essere scritta come loro combinazione lineare:

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{y}^1(x) + C_2\mathbf{y}^2(x) + \dots + C_n\mathbf{y}^n(x). \quad (1.152)$$

Consideriamo adesso una matrice $\mathbb{Y}(x)$ che abbia per colonne le funzioni vettoriali $\mathbf{y}^1(x), \mathbf{y}^2(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$, definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed aventi immagine in \mathbb{R}^n e che costituiscono un set di n soluzioni linearmente indipendenti di (1.153):

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix},$$

dove

$$\mathbf{y}^i = \begin{pmatrix} y_1^i(x) \\ y_2^i(x) \\ \vdots \\ y_n^i(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Posto

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

la soluzione (1.152) può essere scritta come

$$\mathbf{y} = \mathbb{Y}\mathbf{C},$$

effettuando il prodotto riga per colonna fra la matrice \mathbb{Y} , di dimensione $n \times n$ ed il vettore \mathbf{C} , di dimensione $n \times 1$.

Una matrice \mathbb{Y} viene detta matrice fondamentale delle soluzioni di (1.153), se le sue colonne costituiscono un set di n soluzioni linearmente indipendenti della (1.153).

Teorema 1.16.1 *Sia $\mathbb{Y}(x)$ una matrice fondamentale di soluzioni dell'equazione*

$$\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}, \quad (1.153)$$

allora vale

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{Y}(x)\mathbb{Y}^{-1}(x_0), \quad (1.154)$$

se e solo se \mathbb{A} è una matrice costante ¹⁵ e dove $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Osserviamo che $\mathbb{Y}(x)$ è una matrice fondamentale di soluzioni di (1.153), se e solo se $\det \mathbb{Y}(x) \neq 0$ ed inoltre vale

$$\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}, \quad (1.155)$$

dove la matrice \mathbb{Y}' ha per elementi le derivate dei corrispondenti elementi di $\mathbb{Y}(x)$.

Lemma 1.2 *La matrice esponenziale $e^{\mathbb{A}x}$ è una matrice fondamentale di soluzioni di (1.153).*

Prova: abbiamo provato che

$$\frac{d}{dx}e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{A}e^{\mathbb{A}x},$$

quindi $e^{\mathbb{A}x}$ è soluzione di (1.155), inoltre, poiché $e^{\mathbb{A}x}$ è definita dalla serie di matrici

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{I} + x\mathbb{A} + \frac{x^2\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{x^n\mathbb{A}^n}{n!} + \dots, \quad (1.156)$$

avremo

$$e^{\mathbb{A}0} = \mathbb{I}.$$

Per l'invarianza del determinante, avremo quindi $\det e^{\mathbb{A}x} = \det e^{\mathbb{A}0} = \det \mathbb{I} = 1$ ed il lemma è provato. ■

Lemma 1.3 *Siano $\mathbb{X}(x)$ e $\mathbb{Y}(x)$ due matrici fondamentali di soluzioni della (1.153), allora esiste sempre una matrice costante \mathbb{K} ; tale che*

$$\mathbb{X}(x) = \mathbb{Y}(x)\mathbb{K}.$$

Prova: per ipotesi le colonne delle matrici $\mathbb{X}(x)$ e $\mathbb{Y}(x)$ sono linearmente indipendenti, quindi ogni colonna di $\mathbb{X}(x)$ può essere scritta come combinazione lineare delle colonne di $\mathbb{Y}(x)$:

$$\mathbf{x}^j(x) = c_1^j \mathbf{y}^1(x) + c_2^j \mathbf{y}^2(x) + \dots + c_n^j \mathbf{y}^n(x), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.157)$$

Se costruiamo una matrice \mathbb{C} formata dai vettori colonna

$$\mathbb{C}^j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = (\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \dots, \mathbb{C}^n),$$

¹⁵se $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x)$ non è una matrice costante, segue che $\frac{d}{dx}e^{\mathbb{A}x} = (\mathbb{A} + x\mathbb{A}')e^{\mathbb{A}x}$, e quindi non risolve la (1.153) e non ne costituisce una matrice fondamentale di soluzioni.

allora le n equazioni (1.157) sono equivalenti all'unica equazione matriciale

$$\mathbb{X}(x) = \mathbb{Y}(x)\mathbb{K}.$$

ed il lemma è provato. ■

Poiché la matrice esponenziale $e^{\mathbb{A}x}$ è una matrice fondamentale, allora data una qualunque altra matrice fondamentale $\mathbb{Y}(x)$, esiste una matrice costante \mathbb{K} , tale che

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{Y}(x)\mathbb{K} \quad \text{e per } x = 0$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{Y}(0)\mathbb{K}, \quad \text{ovvero } \mathbb{K} = \mathbb{Y}^{-1}(0).$$

Questo significa che si può sempre ottenere la matrice fondamentale esponenziale, conoscendo una qualunque matrice fondamentale:

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{Y}(x)\mathbb{Y}^{-1}(0). \quad (1.158)$$

e, in generale

$$e^{\mathbb{A}(x-x_0)} = \mathbb{Y}(x)\mathbb{Y}^{-1}(x_0). \quad (1.159)$$

PVI per l'EDO lineare vettoriale non omogenea.

Consideriamo il seguente PVI per un'equazione differenziale lineare

$$\mathbf{y}' = \mathbb{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.160)$$

dove la matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può dipendere dalla variabile indipendente $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbf{f}(x)$ è una funzione nota $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se $\mathbf{y}^1(x), \mathbf{y}^2(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione dell'EDO omogenea associata alla (1.160), allora la sua soluzione generale è data da

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}^1(x) + c_2\mathbf{y}^2(x) + \dots + c_n\mathbf{y}^n(x),$$

dove c_1, c_2, \dots, c_n sono n costanti arbitrarie.

Analogamente a quanto visto per il caso di EDO lineari scalari di secondo ordine, possiamo cercare la soluzione generale della (1.160) con il **metodo di variazione delle costanti**, ovvero nella forma

$$\mathbf{y}(x) = u_1(x)\mathbf{y}^1(x) + u_2(x)\mathbf{y}^2(x) + \dots + u_n(x)\mathbf{y}^n(x), \quad (1.161)$$

dove $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ sono n funzioni incognite da determinare. La (1.161) può essere scritta in forma matriciale:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbb{Y}(x)\mathbf{u}(x), \quad (1.162)$$

dove $\mathbb{Y}(x)$ è una matrice fondamentale di soluzioni per l'EDO omogenea associata alla (1.160) e

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}.$$

Introducendo (1.162) in (1.160) avremo:

$$\mathbb{Y}'(x)\mathbf{u}(x) + \mathbb{Y}(x)\mathbf{u}'(x) = \mathbb{A}(x)\mathbb{Y}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{f}(x). \quad (1.163)$$

Poiché $\mathbb{Y}(x)$ è una matrice fondamentale di soluzioni, avremo che

$$\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}(x)\mathbb{Y}(x)$$

e quindi la (1.163) si riduce a

$$\mathbb{Y}(x)\mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x), \quad (1.164)$$

che, per l'invertibilità della $\mathbb{Y}(x)$ possiamo riscrivere la (1.164) come

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbb{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x) \quad (1.165)$$

ed integrando fra il valore iniziale x_0 ed il valore generico x , avremo

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x \mathbb{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds, \quad \text{dove } \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x_0). \quad (1.166)$$

\mathbf{u}_0 non è noto, ma può essere facilmente ricavato dalla (1.162):

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbb{Y}(x_0)\mathbf{u}(x_0) \implies \mathbf{u}_0 = \mathbb{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0$$

e, di conseguenza

$$\mathbf{u}(x) = \mathbb{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbb{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds, \quad \text{dove } \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x_0). \quad (1.167)$$

Se introduciamo (1.167) in (1.162), otteniamo la soluzione del PVI (1.160):

$$\mathbf{y}(x) = \mathbb{Y}(x)\mathbb{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \mathbb{Y}(x) \int_{x_0}^x \mathbb{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds. \quad (1.168)$$

Nel caso in cui la matrice \mathbb{A} in (1.160) sia formata da elementi costanti, la matrice esponenziale $e^{\mathbb{A}x}$ è una matrice fondamentale di soluzioni e la (1.168) assume una forma più semplice:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbb{A}(x-x_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x e^{\mathbb{A}(s-x_0)}\mathbf{f}(s) ds.$$

Capitolo 2

Equazioni non lineari

2.1 Il pendolo non lineare

Consideriamo l'equazione non lineare del II ordine

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad (2.1)$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x} = 0$. L'integrazione per quadrature porta dunque all'equazione differenziale del primo ordine non lineare ed in forma non normale

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \cos x = -\omega^2 \cos x_0 \quad (2.2)$$

che esprime la conservazione dell'energia del sistema.

Semplici considerazioni portano al calcolo del periodo delle oscillazioni attraverso il seguente integrale:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}}. \quad (2.3)$$

Si osservi che la funzione integranda è non limitata per $x \rightarrow x_0$. Questo significa che l'integrale (2.3) è eventualmente definito in senso generalizzato ed occorre valutare se il tempo calcolato risulti finito.

A questo scopo possiamo isolare la singolarità in x_0 spezzando l'integrazione in un primo integrale che esclude la singolarità ed in un secondo integrale, che arriva fino ad essa, e che studieremo in dettaglio. Posto

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}}$$

con $\varepsilon > 0$ avremo che

$$T = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \quad (2.4)$$

dove \mathcal{I}_1 ha un valore sicuramente finito. Studiamo adesso \mathcal{I}_2 introducendo il seguente cambiamento di variabile di integrazione:

$$x = x_0 - \eta \implies dx = -d\eta \quad \text{e} \quad \eta \in [0, \varepsilon],$$

da cui

$$\mathcal{I}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{\cos(x_0 - \eta) - \cos x_0}}.$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} \cos(x_0 - \eta) - \cos x_0 &= \cos x_0 \cos \eta + \sin x_0 \sin \eta - \cos x_0 \\ &= \sin x_0 \sin \eta + \cos x_0(\cos \eta - 1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

poiché ε può essere scelto arbitrariamente piccolo, avremo che

$$\sqrt{\cos(x_0 - \eta) - \cos x_0} \simeq \sqrt{\sin x_0} \sqrt{\eta}$$

e

$$\mathcal{I}_2 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\sin x_0}} \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}$$

risulta finito, così come il periodo di oscillazione T .

Diverso è il caso in cui $x_0 = \pi$. In questo caso, ovviamente $\sin x_0 = 0$ e $\cos x_0 = -1$ e

$$\mathcal{I}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \cos \eta}} \simeq \frac{2}{\omega} \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\eta}. \quad (2.6)$$

La funzione integranda in (2.6) è singolare in 0, ma è integrabile e la sua primitiva è la funzione $\log \eta$, non definita in 0 e non limitata per $\eta \rightarrow 0$: il periodo limite delle “grandi” oscillazioni, quello per cui il pendolo si arresta sulla posizione di equilibrio instabile $x_0 = \pi$, è dunque infinito!

Calcolo del periodo.

Consideriamo l'integrale 2.3 ed effettuiamo le seguenti sostituzioni

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \cos x_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x_0}{2}.$$

L'espressione del periodo T diviene quindi:

$$T = \frac{2}{\omega} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{x_0} \frac{1}{\sin \frac{x_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \xi}}, \quad (2.7)$$

dove

$$\sin \xi = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x_0}{2}} \leq 1.$$

Osserviamo che, per quanto riguarda i limiti di integrazione, abbiamo che, per $x = x_0$, $\sin \xi = 1$ e quindi $\xi = \frac{\pi}{2}$.

Per il cambiamento della variabile di integrazione da x a ξ , possiamo operare nel modo seguente: poiché $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x_0}{2} \sin \xi$, allora

$$d\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \sin \frac{x_0}{2} d(\sin \xi),$$

ovvero

$$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \sin \frac{x_0}{2} \cos \xi d\xi.$$

In conclusione

$$dx = 2 \sin \frac{x_0}{2} \frac{\cos \xi}{\cos \frac{x}{2}} d\xi = 2 \sin \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \xi}{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2}}} d\xi = 2 \sin \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \xi}{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \xi}} d\xi. \quad (2.8)$$

Sostituendo (2.8) in (2.7) insieme con i nuovi estremi di integrazione, otteniamo

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \xi}} = \frac{4}{\omega} K(\sin \frac{x_0}{2}), \quad (2.9)$$

dove

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

è un integrale ellittico di I specie completo.

Consideriamo adesso la funzione

$$F(k) = (1 - f(k))^{-\frac{1}{2}}$$

dove $f(k) = k^2 \sin^2 \xi$ e $k = \sin \frac{x_0}{2}$ e sviluppiamola in serie di MacLaurin per k “piccolo”, il che corrisponde all’ampiezza di oscillazione x_0 “piccola”, in modo da poter sviluppare ed integrare la (2.9).

Osserviamo preliminarmente che, essendo $f(k) = k^2 \sin^2 \xi$, allora

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \sin^2 \xi, \quad f'''(0) = 0, \dots$$

Consideriamo adesso la $F(k)$:

$$F(k) = (1 - f(k))^{-\frac{1}{2}} \implies F(0) = 1,$$

$$F'(k) = \frac{1}{2} (1 - f(k))^{-\frac{3}{2}} f'(k) \implies F'(0) = 0,$$

$$F''(k) = \frac{3}{4}(1 - f(k))^{-\frac{5}{2}} (f'(k))^2 + \frac{1}{2}(1 - f(k))^{-\frac{3}{2}} f''(k) \implies F''(0) = \sin^2 \xi ,$$

$$F'''(k) = \frac{15}{8}(1 - f(k))^{-\frac{7}{2}} (f'(k))^3 + \frac{9}{4}(1 - f(k))^{-\frac{5}{2}} f'(k) f''(k)$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - f(k))^{-\frac{3}{2}} f'''(k) \implies F'''(0) = 0 ,$$

Prima di procedere con la derivata quarta osserviamo che l'unico termine non nullo per $k = 0$ di tale derivata proviene da $\frac{9}{4}(1 - f(k))^{-\frac{5}{2}} f'(k) f''(k)$ ed è esattamente quello che produce un'ulteriore derivata seconda della $f(k)$, ovvero $\frac{9}{4}(1 - f(k))^{-\frac{5}{2}} (f''(k))^2$ e quindi

$$F^{IV}(0) = 9 \sin^4 \xi .$$

Lo sviluppo in k della (2.9) si esprime quindi come

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} d\xi \left[1 + \frac{k^2}{2!} \sin^2 \xi + \frac{k^4}{4!} 9 \sin^4 \xi + \dots \right] \quad (2.10)$$

e, ricordando che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \xi d\xi = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 \xi d\xi = \frac{3\pi}{16} ,$$

lo sviluppo in k del periodo diviene

$$T = \frac{4}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2!} \frac{\pi}{4} + 9 \frac{k^4}{4!} \frac{3\pi}{16} + \dots \right] = \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right] . \quad (2.11)$$

Capitolo 3

Abbecedario degli spazi lineari

3.1 Introduzione

Questo capitolo presenta, in modo molto sintetico i primi elementi (da qui il titolo collodiano ¹ di Abbecedario) di teoria degli spazi lineari, a dimensione finita ed infinita. In particolare sono riportate quelle definizioni e quei risultati che permettono una presentazione moderna e rigorosa della serie di Fourier (Cap.3).

3.2 Definizioni

DEFINIZIONE 3.1 Spazio lineare

Dato un insieme di elementi $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots\}$, si dice che costituisce uno spazio lineare (o vettoriale) \mathbf{V} su di un campo numerico \mathcal{N} (generalmente il campo dei numeri reali \mathbb{R} o dei numeri complessi \mathbb{C}), se per ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ è definito il prodotto per uno scalare (numero) $c \in \mathcal{N}$ e

$$c \mathbf{x} = \mathbf{y} \in \mathbf{V}$$

e per ogni coppia di elementi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ è definita l'operazione di addizione

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z} \in \mathbf{V}$$

¹Carlo Collodi, pseudonimo di Carlo Lorenzini, autore di "Pinocchio" (Firenze, 24 novembre 1826 - Firenze, 26 ottobre 1890)

e valgono inoltre le seguenti proprietà:

$$(i) \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad (\text{proprietà commutativa}).$$

$$(ii) (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad (\text{proprietà associativa}).$$

$$(iii) \exists! \mathbf{0} \in \mathbf{V} \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad (\mathbf{0} \text{ è detto l'elemento zero di } \mathbf{V}).$$

$$(iv) \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \exists! -\mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (-\mathbf{x} \text{ è detto meno } \mathbf{x}).$$

$$(v) 1 \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

$$(vi) (ab) \mathbf{x} = a(b \mathbf{x}), \quad \forall a, b \in \mathcal{N} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

$$(vii) a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \mathbf{x} + a \mathbf{y}.$$

$$(viii) (a + b) \mathbf{x} = a \mathbf{x} + b \mathbf{x}.$$

DEFINIZIONE 3.2 Norma

Si definisce una norma sullo spazio V un'applicazione $N(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}$, che abbia le seguenti proprietà

$$(i) N(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad N(\mathbf{x}) = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(ii) N(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha| N(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \forall \alpha \in \mathcal{N}.$$

$$(iii) N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (\text{disuguaglianza triangolare}).$$

DEFINIZIONE 3.3 Combinazione lineare

Sia \mathbf{V} uno spazio lineare e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{V}$; si dice che \mathbf{x} è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{V}$, se esistono degli scalari (numeri) $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{N}$, tali che

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n$$

L'insieme \mathbf{W} di tutti i vettori generati da $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{V}$ per combinazione lineare costituisce a sua volta uno spazio lineare e si indica con

$$\mathbf{W} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}.$$

DEFINIZIONE 3.4 **Indipendenza lineare**

Gli elementi dello spazio vettoriale (vettori) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{V}$ sono detti *linearmente indipendenti* se l'equazione

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

è risolta se e solo se $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. In caso contrario i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{V}$ son detti *linearmente dipendenti*.

DEFINIZIONE 3.5 **Base**

Un insieme finito di vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ costituisce una **base** per lo spazio lineare \mathbf{V} se i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ sono linearmente indipendenti e $\mathbf{V} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Il numero naturale n è detto la *dimensione* di \mathbf{V} : $n = \text{dim}(\mathbf{V})$.

DEFINIZIONE 3.6 **Prodotto interno**

Sia \mathbf{V} uno spazio lineare reale o complesso. Si definisce **prodotto interno** un'operazione fra due elementi di \mathbf{V} , $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ il cui risultato è un numero (scalare). Per rappresentare il prodotto scalare useremo il seguente formalismo: $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{V}, \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \geq 0.$$

$$(ii) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{V}, \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

$$(iii) \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \in \mathbf{V} \text{ e } a, b \in \mathbb{C}, \langle a\mathbf{x}_i + b\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle = a\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle + b\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle.$$

$$(iv) \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbf{V}, \text{ si ha } \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle}.$$

dove l'espressione $\overline{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle}$ indica il complesso coniugato di $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Uno spazio lineare dotato di prodotto interno prende il nome di **spazio unitario** o di "spazio con prodotto interno".

Riportiamo alcune fondamentali conseguenze della definizione di prodotto interno:

Proprietà del prodotto interno

$$(a) \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \in \mathbf{V}, a, b \in \mathbb{C}, \langle \mathbf{x}_i, a\mathbf{x}_j + b\mathbf{x}_k \rangle = \bar{a}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \bar{b}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle ;$$

$$(b) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{V}, a \in \mathbb{C}, \langle a\mathbf{x}_i, a\mathbf{x}_i \rangle = |a|^2 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle ;$$

$$(c) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{V}, \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_i \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{0} \rangle} = 0 .$$

DEFINIZIONE 3.7 Norma in uno spazio unitario

Si può definire una norma sullo spazio V per mezzo del prodotto interno

$$\|\mathbf{x}\|^2 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle .$$

DEFINIZIONE 3.8 Base ortonormale

Un insieme finito di vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ costituisce una **base ortonormale** per lo spazio lineare \mathbf{V} se i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti e

$\mathbf{V} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Inoltre $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ e $\|\mathbf{u}_i\|^2 = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$, $\forall i \neq j = 1, 2, \dots, n$.

Procedura di Gram-Schmidt 3.2.1 Una procedura per costruire una base ortonormale in uno spazio lineare unitario \mathbf{V} è data dal metodo di Gram-Schmidt². Consideriamo inizialmente uno spazio \mathbf{V} a dimensione finita n ed un insieme di vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ linearmente indipendenti. Avremo quindi che $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} = \mathbf{V}$. Il metodo consiste in un processo ad n passi che consente di passare da un sistema di n elementi linearmente indipendenti ad un sistema di n elementi ortonormali $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^n$, tali che $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} = \mathbf{V}$. Il primo elemento si costruisce banalmente normalizzando il vettore \mathbf{x}_1 :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} \Rightarrow \|\mathbf{u}_1\| = 1, \quad \text{span}\{\mathbf{u}_1\} = \text{span}\{\mathbf{x}_1\} := \mathbf{V}_1 .$$

Consideriamo adesso il vettore \mathbf{x}_2 e prendiamo, per mezzo del prodotto scalare, la sua proiezione ortogonale su \mathbf{V}_1 :

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 .$$

È evidente che il vettore $\mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2$ è ortogonale a \mathbf{u}_1 e che non può essere il vettore nullo (i.e. $\mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2 \neq \mathbf{0}$), perché, altrimenti, avremmo $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{V}_1$, ovvero che \mathbf{x}_2 è “parallelo a \mathbf{x}_1 , il che è in contrasto con l’ipotesi di indipendenza lineare fra \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Possiamo quindi costruire il secondo elemento della base ortonormale:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2}{\|\mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2\|} \Rightarrow \|\mathbf{u}_2\| = 1, \quad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1, \quad \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} := \mathbf{V}_2 .$$

²Jørgen Pedersen Gram, matematico danese (Nustrup, 27 giugno 1850 - Copenhagen, 29 aprile 1916), Erhard Schmidt, matematico tedesco (Dorpat, 13 gennaio 1876 - Berlino, 6 dicembre 1959).

Al passo generico k si procede nello stesso modo. Indichiamo con $\mathbf{V}_{k-1} := \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\}$ lo spazio lineare generato dai vettori ortonormali $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{k-1}$ e costruiamo mediante il prodotto scalare la proiezione ortogonale di \mathbf{x}_k su \mathbf{V}_{k-1} :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i.$$

L'elemento di ordine k , di norma unitaria ed ortogonale ai precedenti $k-1$ versori, si costruisce generalizzando il secondo passo del processo:

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k}{\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|} \Rightarrow \|\mathbf{u}_k\| = 1, \quad \mathbf{u}_k \perp \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\},$$

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} := \mathbf{V}_k.$$

La procedura termina con il passo n , nel caso di uno spazio lineare a dimensione finita, ma essendo indipendente da n , può essere iterata all'infinito e resta quindi valida per spazi lineari di dimensione infinita.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 3.2.2 Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno (spazio unitario). Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ³

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Prova: Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ la prova è immediata. Supponiamo che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ e, quindi, che $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Per comodità poniamo $a = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, dove a può essere un numero reale o complesso. Per ogni numero reale λ avremo che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{a} \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{a} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{a} \mathbf{y} \rangle = \\ &\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \mathbf{y} \rangle - \lambda \langle \mathbf{a} \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{a} \mathbf{y}, \mathbf{a} \mathbf{y} \rangle = \\ &\|\mathbf{x}\|^2 - \lambda \bar{a} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \lambda a \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \lambda^2 a \bar{a} \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned} \quad (3.0)$$

Ricordando che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a$ e che $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \bar{a}$, avremo per la (3.0):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{a} \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \lambda \bar{a} a - \lambda a \bar{a} + \lambda^2 |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 = \\ &\lambda^2 |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2\lambda |a|^2 + \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La (3.1) può essere vista come un trinomio del secondo ordine a coefficienti positivi (a segni alterni), il cui discriminante è $|a|^4 - |a|^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$. Poiché la

³Karl Hermann Amandus Schwarz, matematico tedesco (Hermsdorf (Jerzmanowa, Polonia), 25 gennaio 1843 - Berlino, 30 novembre 1921).

(3.1) è non negativa, il discriminante è necessariamente non positivo. Quindi $|a|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$, ovvero

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| .$$

Una dimostrazione equivalente può essere data nel modo seguente. Cerchiamo il minimo, rispetto al variare di λ del trinomio (3.1):

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda^2 |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2\lambda |a|^2 + \|\mathbf{x}\|^2) = 2\lambda |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - 2|a|^2 = 0 ,$$

che si annulla per $\lambda = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Sostituendo questo valore nella (3.1) avremo

$$\frac{|a|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} - 2 \frac{|a|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq 0 \Rightarrow |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| . \quad \blacksquare$$

Disuguaglianza di Minkowski (o triangolare) 3.2.3 *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno (spazio unitario). Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, vale la disuguaglianza Minkowski ⁴*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| .$$

Prova: *Osserviamo che*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \\ &\|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 . \end{aligned}$$

Osserviamo che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ è un numero reale. Infatti, posto $z = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e $Re z = a$, $Im z = b$, avremo

$$z + \bar{z} = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z|$$

Di conseguenza

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo che $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, quindi

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \text{ e l'asserto è dimostrato. } \quad \blacksquare$$

⁴Hermann Minkowski, matematico tedesco (Aleksotas, 22 giugno 1864 - Göttingen, 12 gennaio 1909).

Disuguaglianza di Bessel 3.2.4 Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno (spazio unitario), $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ e sia \mathbf{V}_n un sottospazio lineare di \mathbf{V} , generato da una base ortonormale di vettori $\{\mathbf{u}_n\}$, $\mathbf{V}_n = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbf{V}$. Posto $\alpha_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle$, vale la disuguaglianza di Bessel ⁵

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.1)$$

Prova: Consideriamo la seguente espressione

$$0 \leq \left\| \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \right\|^2 = \left\langle \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k, \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \right\rangle$$

Sviluppando il prodotto scalare a destra avremo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle + \langle \sum_{h=1}^n \alpha_h \mathbf{u}_h, \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle = \\ &\|\mathbf{x}\|^2 - 2\text{Re} \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Ma $\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_k$ e quindi

$$-2\text{Re} \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \right\rangle = -2 \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2, \text{ da cui segue l'asserto. } \blacksquare$$

Osservazione: Consideriamo che la dimensione di \mathbf{V} sia infinita che sia possibile costruire una successione infinita di vettori ortonormali $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{V}$, poiché nella (3.2.4) la limitazione della somma dei termini $|\alpha_k|^2$ non dipende dal numero n degli addendi, avremo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.2)$$

Pertanto la serie converge e quindi, necessariamente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ (**Lemma di Riemann-Lebesgue** ⁶ .)

Nel caso in cui valga l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (3.2)$$

si dice che per $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ vale l'identità di Parseval ⁷.

⁵Friedrich Wilhelm Bessel, matematico e astronomo tedesco (Minden, 22 luglio 1784 - Königsberg, 17 marzo 1846).

⁶Georg Friedrich Bernhard Riemann, matematico e fisico tedesco (Breselenz, 17 settembre 1826 - Selasca, 20 luglio 1866) ; Henri Léon Lebesgue, matematico francese (Beauvais, 28 giugno 1875 - Parigi, 26 luglio 1941)

⁷Marc-Antoine Parseval des Chênes, matematico francese (Rosires-aux-Salines, 27 aprile 1755 - Parigi, 16 agosto 1836).

Proiezione ortogonale e migliore approssimazione 3.2.5 Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno (spazio unitario), $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ e sia \mathbf{V}_n un sottospazio lineare di \mathbf{V} , generato da una base ortonormale di vettori $\{\mathbf{u}_n\}$, $\mathbf{V}_n = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \in \mathbf{V}$. Se $\mathbf{x} \notin \mathbf{V}_n$, allora posto $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$, si ha che

$$\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i,$$

dove $\hat{\mathbf{x}}$ è la proiezione ortogonale di \mathbf{x} su \mathbf{V}_n . Proviamo adesso che

$$\langle \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n,$$

ovvero che

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \perp \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n.$$

Infatti, poiché $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$, esso è rappresentabile attraverso la base di \mathbf{V}_n , cioè

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i.$$

Basterà quindi provare che $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ è ortogonale ad ogni elemento \mathbf{u}_i della base ortonormale di \mathbf{V}_n per provare l'asserto. Infatti, $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\langle \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle =$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle \delta_{ki} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle = 0,$$

dove δ_{ki} è la delta di Kronecker⁸ ($\delta_{ki} = 0$ se $k \neq i$, $\delta_{ki} = 1$ se $k = i$). Risulta facile dimostrare adesso che $\hat{\mathbf{x}}$ è la migliore approssimazione (nel senso della norma di \mathbf{V}) di \mathbf{x} in \mathbf{V}_n . Infatti (omettiamo i passaggi):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n. \quad (3.-1)$$

In conclusione, la “distanza”, misurata dalla norma, fra \mathbf{x} e gli elementi del sottospazio \mathbf{V}_n è minimizzata da $\hat{\mathbf{x}}$ che risulta la migliore approssimazione di \mathbf{x} in \mathbf{V}_n .

Base approssimante 3.2.6 Una successione di elementi $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \dots\}$ linearmente indipendenti di uno spazio lineare \mathbf{V} è detta **base approssimante** per \mathbf{V} se $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$ esiste una combinazione lineare di elementi \mathbf{x}_i della

⁸Leopold Kronecker, matematico e logico tedesco (Liegnitz, 7 dicembre 1823 - Berlino, 29 dicembre 1891).

successione che approssimano \mathbf{x} quanto si vuole, i.e.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \text{ e } \varepsilon > 0 \exists C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \dots + C_n \mathbf{x}_n$$

tale che (3.0)

$$\|\mathbf{x} - C_1 \mathbf{x}_1 - C_2 \mathbf{x}_2 - \dots - C_n \mathbf{x}_n\| < \varepsilon .$$

Osservazione: il fatto che si possa trovare una base approssimante per gli elementi di uno spazio lineare non significa che esiste una serie infinita che converge in norma a tali elementi. Infatti per migliorare l'approssimazione in (3.0) occorre in generale ricalcolare tutti i coefficienti della somma (i.e. per trovare la migliore approssimazione al passo $n+1$ si troverà che i coefficienti calcolati per l'approssimazione al precedente passo n saranno diversi da quelli ricalcolati). Se consideriamo, ad esempio, lo spazio $\mathbf{V} = \mathcal{C}[-1, +1]$, ovvero lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[-1, +1]$, vediamo che tutti gli elementi sono approssimabili quanto si vuole da polinomi e che quindi la successione infinita $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ di funzioni linearmente indipendenti è una base approssimante, ma non esiste una serie convergente di potenze (serie di McLaurin) che rappresenti la funzione continua $|x|$.

Teorema 3.2.7 Se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \dots\}$ è una base approssimante ortonormale in \mathbf{V} e $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{u}_k$ converge in norma a \mathbf{x} con $\alpha_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle$.

Spazi di Banach 3.2.8 Uno spazio lineare \mathbf{V} dotato di norma si dice **completo** se ogni successione di Cauchy⁹ in \mathbf{V} ammette limite in \mathbf{V} . Uno spazio lineare normato e completo è detto **spazio di Banach**¹⁰

Esempi: \mathbb{R}^n è uno spazio di Banach, se dotato di una norma (euclidea, uniforme ...). Gli spazi di funzioni $L^p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$, ovvero gli spazi lineari formati dalle funzioni $f(x)$ reali o complesse definite su di un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, misurabili e la cui p -esima potenza sia integrabile (nel senso di Lebesgue) (i.e. $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$) e dotati della norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ sono spazi normati completi e quindi spazi di Banach

⁹Una successione $\{\mathbf{x}_n\}$ si dice di Cauchy (in uno spazio normato) se $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \rightarrow 0$ per n e $m \rightarrow \infty$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, tale che, per $n, m \geq N$, allora $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$.

¹⁰Stefan Banach, matematico polacco (Cracovia, 30 marzo 1892 - Leopoli, 31 agosto 1945).

Spazi di Hilbert 3.2.9 *Uno spazio lineare \mathbf{V} unitario (ovvero dotato di prodotto scalare e normato per mezzo di esso) e completo è detto **spazio di Hilbert**.*¹¹

Esempi: \mathbb{R}^n è uno spazio di Hilbert, se dotato dell'usuale prodotto scalare (prodotto componente per componente). Gli spazi di funzioni $L^2([a, b])$, ovvero gli spazi lineari formati dalle funzioni $f(x)$ reali o complesse definite su di un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, misurabili e il cui quadrato sia integrabile (nel senso di Lebesgue) (i.e. $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$) e dotati della norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ sono spazi unitari completi e quindi spazi di Hilbert.

¹¹David Hilbert, matematico tedesco (Königsberg, 23 gennaio 1862 - Göttingen 14 febbraio 1943).

Capitolo 4

Serie di Fourier

4.1 Introduzione

Questo capitolo è dedicato alla serie di Fourier ¹. Le motivazioni per lo studio di questo argomento sono molteplici e risiedono sia sull'aspetto delle applicazioni sia su quello puramente matematico. La serie di funzioni, nota come serie di Fourier, nasce dai lavori del matematico e fisico francese sulla modellizzazione matematica del fenomeno della conduzione del calore ². Come vedremo nell'esempio alla fine di questo capitolo il modello proposto si presenta come un'equazione differenziale a derivate parziali (PDE), nota come equazione del calore o equazione della diffusione (lineare, del secondo ordine). Se se ne cercano soluzioni in un dominio limitato (caso semplice: un dominio spaziale unidimensionale come, per esempio, una sbarretta), si giunge immediatamente al problema dell'esistenza di una serie di funzioni armoniche (seni e coseni) che converga ad una funzione assegnata (in questo caso alla funzione che rappresenta il profilo iniziale della temperatura). Analoghi problemi nascono dalla risoluzione in domini limitati per le altre due fondamentali PDE lineari, del secondo ordine, ovvero l'equazione delle onde e l'equazione di Laplace (o del potenziale). Cosa significa l'esistenza di una serie di funzioni (in questo caso di funzioni armoniche)? Esistenza è di fatto sinonimo di convergenza e quindi di studio del **dove** (dominio di convergenza) e del **come** (ovvero che tipo di convergenza e con quale velocità) la serie converge. Queste osservazioni ci dicono che un approfondimento rigoroso di alcuni aspetti matematici è necessario.

L'altro aspetto fondamentale, che è comunque alla base di ogni serie di funzioni, è dato dall'uso della serie come approssimazione, mediante funzioni più "semplici" (più semplicemente calcolabili), di funzioni "difficili". Un esempio

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, matematico e fisico francese (Auxerre, 21 marzo 1768 - Parigi, 16 maggio 1830).

²Thorie analytique de la chaleur (Firmin-Didot, Parigi, 1822)

fondamentale già trattato nel corso di Analisi Matematica è quello dell'uso delle funzioni polinomiali (sviluppi in serie di Taylor e di McLaurin). La serie di Fourier costituisce un esempio altrettanto importante come strumento di approssimazione.

4.2 Polinomi trigonometrici

Consideriamo una funzione del tipo

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx. \quad (4.1)$$

$S_N(x)$ è una combinazione lineare di funzioni armoniche di periodo $T_n = \frac{2\pi}{n}$ (oltre che della costante $\frac{a_0}{2}$, che è quindi una funzione periodica di periodo qualsiasi). $S_N(x)$ è dunque una funzione periodica con periodo uguale al periodo massimo fra quello delle funzioni armoniche presenti nel polinomio. Ad esempio se a_1 o b_1 sono diversi da zero, il periodo di $S_N(x)$ è 2π .

È interessante notare che $S_N(x)$ può avere delle proprietà di simmetria importanti. Se il polinomio $S_N(x)$ è composto da sole funzioni $\cos nx$ allora sarà **pari**, se invece è composto da sole funzioni $\sin nx$ allora è **dispari**. Il punto che cominceremo ad affrontare adesso è questo: sotto quali condizioni e in che senso la (4.1) ha significato per $N \rightarrow \infty$. Inizieremo dallo studio di alcune proprietà fondamentali dello spazio di funzioni $L^2([-\pi, \pi])$, ovvero lo spazio delle funzioni misurabili secondo Lebesgue ed a quadrato sommabile (si veda il Cap.2) definite sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Nell'ambito di questo corso (così come nei precedenti corsi di Matematica) non c'è la possibilità di presentare la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue (che richiederebbe anche la presentazione della teoria della misura di Lebesgue). Basti qui segnalare che le funzioni integrabili secondo Riemann sono tutte integrabili secondo Lebesgue (la teoria dell'integrazione di Lebesgue costituisce quindi un ampliamento di quella di Riemann), ma che essa è indispensabile per rendere lo spazio L^2 , sopra citato, uno spazio completo, ovvero uno spazio di Hilbert, con tutte le sue fondamentali proprietà. Questa è quindi l'ipotesi di partenza, che assumeremo senza dimostrazione, per costruire le basi ortonormali (complete), che costituiscono gli "ingredienti della serie di Fourier. Ricordiamo infine che le funzioni reali o complesse definite su $[-\pi, \pi]$, continue "a pezzi" (ovvero continue, salvo un numero finito di discontinuità finite), che spesso sono usate per esempi ed esercizi di sviluppi in serie di Fourier, sono funzioni a quadrato sommabile e costituiscono un sottospazio lineare di $L^2([-\pi, \pi])$.

4.3 Lo spazio di Hilbert L^2 e la convergenza quadratica

Definiamo con X lo spazio delle funzioni (a valori reali o complessi) misurabili ed a quadrato sommabile definite sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, dotato del prodotto scalare (prodotto interno)³:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \overline{g(x)} dx . \quad (4.2)$$

Tramite il prodotto scalare è poi possibile definire una norma:

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \overline{f(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (4.3)$$

Cominciamo a cercare una base ortonormale di funzioni per lo spazio X . Dobbiamo cioè trovare una successione di funzioni (a valori reali o complessi) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tali che

$$\|f_n\| = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} f_n(x) \overline{f_n(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f_n(x) \overline{f_m(x)} dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m .$$

Consideriamo la successione delle funzioni reali definite su $[-\pi, \pi]$ del tipo $\sin nx$ e $\cos nx$. Si osserva che valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nxdx &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nxdx = \pi \quad \forall n \neq 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nxdx &= 2\pi \quad \text{sse } n = 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mxdx &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mxdx = 0 \quad \forall n \neq m, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mxdx &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Nota 4.1 *Le formule si ottengono integrando per parti, oppure usando le formule di prostaferesi (si veda l'Appendice 1).*

Le precedenti proprietà delle funzioni trigonometriche $\sin nx$ e $\cos nx$ sull'intervallo $[-\pi, +\pi]$ ci confermano che si tratta di un sistema ortogonale di

³Come è evidente, le proprietà di questo spazio di funzioni sono generalizzabili per semplice cambiamento di variabile ad un qualunque spazio L^2 per funzioni definite su un intervallo.

elementi dello spazio funzionale $L^2([-\pi, +\pi])$. In termini del prodotto scalare definito in (4.2) abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\langle \cos nx, \cos mx \rangle &= 0, \quad \forall n \neq m, \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= 0, \quad \forall n \neq m, \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle &= 0, \quad \forall n, m.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Viceversa, dalla definizione di norma in X , (4.3), si ha

$$\begin{aligned}\langle \cos nx, \cos nx \rangle &= \|\cos nx\|^2 = 2\pi, \quad \text{sse } n = 0, \\ \langle \cos nx, \cos nx \rangle &= \|\sin nx\|^2 = \pi, \quad \forall n \neq 0, \\ \langle \sin nx, \sin nx \rangle &= \|\cos nx\|^2 = \pi, \quad \forall n \neq 0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Dalle relazioni (4.7),(4.6) si ottiene immediatamente (normalizzando le (4.7)) un set di funzioni ortonormali per X :

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.\tag{4.8}$$

È evidente che ogni combinazione lineare (sia con coefficienti reali che complessi) finita di elementi di (4.8) appartiene allo spazio X e che ne genera un sottospazio a dimensione finita. Un secondo sistema di funzioni ortonormali, di fondamentale importanza fra gli infiniti possibili, si ottiene per combinazione lineare, con coefficienti complessi (formule di Eulero), dal sistema delle funzioni armoniche (4.8)(per i dettagli si veda l'Appendice 1):

$$\{g_n(x)\} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}},\tag{4.9}$$

dove \mathbb{Z} costituisce l'insieme dei numeri interi relativi, $\mathbb{Z} := \dots, -N, \dots, -1, 0, +1, \dots, +N, \dots$. L'introduzione di questo sistema estende il significato di X alle funzioni definite su $[-\pi, +\pi]$ con immagine a valori complessi.

Notiamo che per tutti gli elementi di X rappresentabili attraverso combinazioni lineari (reali o complesse) finite di elementi di un sistema ortonormale, che indichiamo genericamente come $\{u_n(x)\}$ (si può trattare dei sistemi (4.8) o (4.9) o di un qualunque altro sistema con le stesse proprietà), il calcolo della norma e del prodotto scalare è reso estremamente semplice ⁴.

⁴I risultati che qui illustriamo sono ovviamente validi per un qualunque spazio unitario e non sono specifici dello spazio funzionale X di cui ci occupiamo in questo paragrafo.

4.3. LO SPAZIO DI HILBERT L^2 E LA CONVERGENZA QUADRATICA 71

Infatti, se $f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(x)$ e $g(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n u_n(x)$, dalle proprietà di ortonormalità delle $\{u_n(x)\}$ si deduce immediatamente che

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N \alpha_n \bar{\alpha}_n, \quad \|g\|^2 = \sum_{n=1}^N \beta_n \bar{\beta}_n, \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^N \alpha_n \bar{\beta}_n. \quad (4.10)$$

Osserviamo un'ulteriore fondamentale proprietà dei sistemi ortonormali. Consideriamo lo spazio X_N (a dimensione finita N) generato da un sistema ortonormale $\{u_n(x)\}_{n=1}^N$ e cerchiamo l'elemento f_N di X_N che meglio approssimi un elemento f di X . Ogni $f_N \in X_N$ è rappresentabile da una combinazione lineare degli elementi del sistema ortonormale generatore. Quindi possiamo porre

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \gamma_n u_n(x). \quad (4.11)$$

Il problema si sposta quindi alla ricerca dei coefficienti γ_n che minimizzano la "distanza" E_N fra f e f_N . Consideriamo per semplicità il caso reale (per il caso complesso il risultato è lo stesso, con calcoli un po' più complicati):

$$E_N^2 = \|f - f_N\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^N \gamma_n u_n(x) \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n \langle f, u_n \rangle + \sum_{n=1}^N \gamma_n^2. \quad (4.12)$$

E_N risulta minimo quando si annullano le sue derivate parziali rispetto ai coefficienti γ_n , ovvero:

$$\frac{\partial E_N^2}{\partial \gamma_n} = -2 \langle f, u_n \rangle + 2 \gamma_n. \quad (4.13)$$

I coefficienti che minimizzano E_N sono quindi quelli valutabili dalla conoscenza di f e del sistema ortonormale $\{u_n(x)\}_{n=1}^N$, che in questo caso (spazio a dimensione finita) merita il nome di base:

$$\gamma_n = \langle f, u_n \rangle. \quad (4.14)$$

Possiamo valutare questo risultato calcolando i coefficienti che si ottengono scegliendo prima il sistema ortonormale (4.8) e poi il (4.9). Utilizzando (4.8), $f_N \in X_N$ sarà espressa come

$$f_N(x) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N A_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.15)$$

da cui

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) dx, \\ A_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ B_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Confrontando i coefficienti di (4.15) con quelli del polinomio trigonometrico (4.1) si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2A_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) dx, \\ a_n &= \frac{A_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ b_n &= \frac{B_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se invece utilizziamo il sistema ortonormale (4.9), cercando la migliore approssimazione di $f(x)$ nella forma

$$\sum_{n=-N}^{+N} C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.18)$$

otteniamo il seguente valore dei coefficienti C_n :

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) e^{-inx} dx. \quad (4.19)$$

Se al posto della (4.18) usiamo invece (come si fa generalmente) la forma

$$\sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx}, \quad (4.20)$$

i coefficienti c_n sono dati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(x) e^{-inx} dx, \quad (4.21)$$

da cui

$$C_n = \sqrt{2\pi} c_n. \quad (4.22)$$

4.3. LO SPAZIO DI HILBERT L^2 E LA CONVERGENZA QUADRATICA 73

La scelta della sommatoria (finita) fra $-N$ e $+N$ per la (4.18) e la (4.20), ci permette di ricavare una semplice relazione fra i coefficienti a_n e b_n , reali se $f(x)$ è a valori reali, della (4.1) ed i coefficienti c_n , in generale complessi, della (4.18). Utilizzando le formule di Eulero (Appendice 1), si ha

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{+inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}, \quad n > 0. \quad (4.23)$$

La questione (molto delicata) è se queste proprietà possono valere anche se si estende all'infinito la sommatoria e se, estendendo all'infinito la sommatoria, si ottiene un elemento di X e, ancora, se tutti gli elementi di X sono rappresentabili nella forma $\sum_{n=1}^N a_n u_n(x)$, mandando N all'infinito. Si torna alla questione già posta nel paragrafo 2.2 per dare significato al passaggio da polinomio trigonometrico a serie trigonometrica.

Prima di trattare questo punto dobbiamo però controllare se le definizioni di prodotto scalare e di norma, (4.2) e (4.3), che abbiamo dato per definire lo spazio X siano corrette. In particolare si osserva che la (4.3) non è una norma (nel senso che non ne rispetta tutte le proprietà). Avendo definito la norma per mezzo di un integrale avremo che tutte le funzioni definite su $[-\pi, +\pi]$, nulle quasi ovunque, ma a valori finiti diversi da zero in un numero finito di punti, sono a quadrato sommabile (quindi appartengono ad X), ma hanno tutte norma nulla. Non esiste quindi un unico elemento 0 dello spazio fin qui considerato. Il problema viene superato considerando come elemento di X non la singola funzione a quadrato sommabile, ma una rappresentante della classe di equivalenza definita attraverso l'uguaglianza delle norme: **funzioni che hanno la stessa norma sono lo stesso elemento di X** . Se

$$\|f - g\|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

allora $f \simeq g$ e le due funzioni equivalenti identificano lo stesso elemento dello spazio. La scelta di una funzione rappresentante la classe di equivalenza, nel senso sopra definito, non modifica il prodotto scalare.

Adesso che abbiamo meglio precisato lo spazio X diamo significato matematico alle considerazioni sull'estensione all'infinito delle combinazioni lineari di sistemi ortonormali. Diremo che, dato un sistema ortonormale $\{u_n(x)\}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$ converge ad un elemento $f \in X$ se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n u_n(x) \right\| = 0. \quad (4.24)$$

L'importanza dello spazio X sta nel fatto che si tratta di uno spazio di Hilbert, ovvero di uno **spazio completo**. Non dimostreremo questa affermazione, ma ci limitiamo ad affermare che le successioni infinite di funzioni ortonormali

reali (4.8) o complesse (4.9) sono basi per X e che ogni elemento di X è rappresentabile (nel senso di (4.24)) da una serie di elementi di (4.8) o di (4.9). La serie costruita con gli elementi di (4.8) sarà detta serie di Fourier reale, quella costruita con gli elementi di (4.9) sarà detta serie di Fourier complessa. Limitandoci ad applicare i risultati esposti nel Cap. 2 (Disuguaglianza di Bessel ed Identità di Parseval, pag. 38) alla base reale (4.8), enunciamo il seguente Teorema:

Teorema di Parseval 4.3.1 *Una funzione $f \in X$ è sviluppabile in serie di Fourier in media quadratica, i.e.*

1) *al variare di S_N fra tutti i polinomi trigonometrici, lo scarto quadratico*

$$E_N^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx$$

risulta minimo se a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier di f ;

2) *lo scarto quadratico E_N è dato da*

$$E_N^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right];$$

3) *vale l'identità di Parseval*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

dove la serie a secondo membro è convergente.

Prova: *Ci limitiamo a dimostrare il punto 2). Infatti*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_N(x)]^2(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) S_N(x) dx + \int_{-\pi}^{+\pi} S_N^2(x) dx.$$

Ricordando la definizione di $S_N(x)$, il secondo integrale a destra del segno di uguaglianza è uguale a

$$-2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right] dx$$

che dà luogo ai tre seguenti contributi:

$$-2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \frac{a_0}{2} dx = -\pi a_0^2 \quad \text{dalla (??);}$$

$$-2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sum_{n=1}^N a_n \cos nx dx = -2\pi \sum_{n=1}^N a_n^2 \quad \text{dalla (??);}$$

$$-2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \, dx = -2\pi \sum_{n=1}^N b_n^2 \quad \text{dalla (??)}.$$

Il terzo integrale a destra del segno di uguaglianza va calcolato introducendo la definizione di $S_N(x)$ e, sviluppatone il quadrato, ricorrendo alle proprietà di periodicità e di ortonormalità delle funzioni $\cos nx$ e $\sin nx$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_N^2(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right]^2 dx.$$

Per le proprietà di periodicità e di ortonormalità, tutti gli integrali dove le funzioni $\cos nx$ e $\sin nx$ compaiono al primo ordine o come prodotti sono nulli. Gli unici termini che danno contributo sono i termini quadratici, cioè rispettivamente

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0^2}{4} dx &= \frac{\pi a_0^2}{2}; \\ \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{+\pi} a_n^2 \cos^2 nx \, dx &= \pi \sum_{n=1}^N a_n^2; \\ \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{+\pi} b_n^2 \sin^2 nx \, dx &= \pi \sum_{n=1}^N b_n^2, \end{aligned}$$

il che prova il risultato enunciato. ■

Corollario di Riemann-Lebesgue 4.3.2 *Dalla convergenza in norma della serie di Fourier segue necessariamente che i suoi coefficienti tendono a 0 per $n \rightarrow \infty$, i.e.*

$$a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \rightarrow 0, \quad b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

ENERGIA di un SEGNALE

Consideriamo una funzione reale, periodica, f . Nelle applicazioni, spesso, la variabile indipendente ha il significato di “tempo” e viene indicata con t . Nel linguaggio fisico e ingegneristico la $f(t)$ viene chiamata “segnale” e l’energia associata al segnale $f(t)$ è definita come

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt.$$

Se si sviluppa $f(t)$ in serie di Fourier ogni armonica ha l’energia

$$\mathcal{E}_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)^2 dt = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

L'uguaglianza di Parseval porta a

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n ,$$

il che significa che l'energia del segnale si ottiene come somma delle energie delle singole armoniche.

4.4 Serie di Fourier di funzioni periodiche

Prima di tutto estendiamo le proprietà degli elementi di X ad una classe più ampia di spazi di Hilbert. È banale infatti verificare che, per semplice cambiamento di variabile, i risultati validi in X sono riportabili ad uno spazio dello stesso tipo, definito su un qualsiasi intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nel generico spazio $X_{[a,b]} := L^2([a, b])$, tutti i risultati restano validi sostituendo $(b - a)$ a 2π e ad x la variabile $\frac{2\pi}{b-a}x$. Ribadiamo che la rappresentazione di una funzione di classe L^2 , definita su un intervallo generico di \mathbb{R} per mezzo di una serie di Fourier (reale o complessa), va intesa nel senso della convergenza in norma (ovvero della convergenza quadratica) (4.24). In generale, quindi, non ci sarà uguaglianza punto per punto fra la funzione $f(x)$ rappresentata e la sua serie di Fourier. Questo fatto sarà identificato dal simbolo \sim . Per funzioni appartenenti a $X_{[a,b]}$, avremo quindi

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} ; \\ f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi x}{b-a}} , \end{aligned} \tag{4.25}$$

dove i coefficienti della serie reale sono dati da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.26}$$

e quelli della serie complessa sono

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i \frac{2n\pi x}{b-a}} dx . \tag{4.27}$$

Osserviamo adesso che una funzione definita su un generico intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere riportata (per semplice cambiamento di variabile mediante una

traslazione) ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine $[-c, +c]$, dove $c = \frac{b-a}{2}$. Con questa operazione le formule (4.25), (4.26) e (4.27) restano valide ponendo $b - a = c$ e sostituendo $-\frac{c}{2}$ ad a e $+\frac{c}{2}$ a b per gli estremi di integrazione.

Occupiamoci adesso di una questione assai importante. La rappresentazione (nel senso della norma L^2) delle funzioni definite su un intervallo reale viene fatta attraverso le funzioni trigonometriche \sin e \cos (oppure attraverso le funzioni esponenziali ad argomento immaginario), che sono funzioni estremamente regolari (analitiche), definite su tutto \mathbb{R} e **periodiche!** Quindi l'identificazione indicata in (4.25) va intesa nel senso di una restrizione all'intervallo su cui è definita la funzione. D'altra parte che differenza c'è fra una funzione definita su un intervallo ed una funzione periodica? Una funzione periodica è, per definizione, una funzione definita su tutto \mathbb{R} , che ripete lo stesso andamento riprendendo gli stessi valori dopo ogni intervallo di lunghezza T (il periodo), una funzione $f(x)$ tale cioè che $f(x) = f(x + T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, salvo punti di non definizione della f ed inoltre $\int_a^b f(x)dx \equiv \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$. È evidente che ogni funzione definita su un intervallo può essere prolungata in modo periodico e che lo studio delle proprietà di una funzione periodica può essere ristretto all'intervallo identificato dal periodo. Questo significa che le proprietà di rappresentazione e di convergenza che abbiamo stabilito per le funzioni di classe L^2 definite su un generico intervallo reale $[a, b]$ si estendono immediatamente a tutte le funzioni periodiche di periodo $(b-a)$ e di classe L^2 sull'intervallo $[a, b]$ definito dal periodo. Osserviamo ancora che una funzione definita su un generico intervallo $[a, b]$ e nulla altrove può essere sempre riportata (per traslazione) all'intervallo $[0, b-a]$ e poi "pensata" come prolungata periodicamente al di fuori dell'intervallo di definizione. In questa operazione, però, non siamo obbligati a scegliere come periodo il valore dell'intervallo $(b-a) = c$, ma possiamo prolungare la funzione, secondo un'opportuna scelta di simmetria sull'intervallo $[-c, 0]$ e poi prolungarla come funzione di periodo $2c$ su tutto \mathbb{R} . Questa scelta, in linea di principio del tutto arbitraria, ha una grande influenza sulla qualità e la velocità di convergenza della serie di Fourier.

Prima di osservare le conseguenze delle eventuali proprietà di simmetria di una funzione sulla sua serie di Fourier, ricordiamo qui sotto alcune definizioni e loro conseguenze.

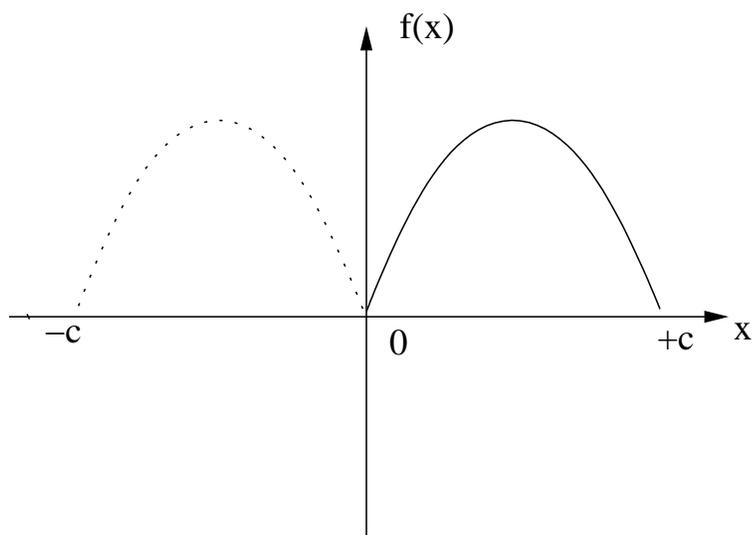


Figura 4.1 *Funzione prolungata pari su $[-c, 0)$*

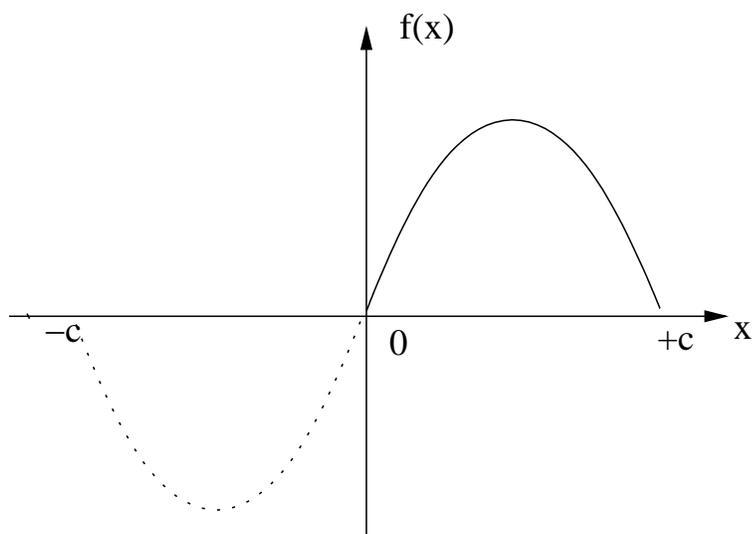


Figura 4.2 *Funzione prolungata dispari su $[-c, 0)$*

Funzioni pari e funzioni dispari

È molto importante osservare che per le funzioni **pari** e per le funzioni **dispari**, periodiche di periodo T e sviluppabili in serie di Fourier, la formula che ne esprime la serie di Fourier si semplifica grandemente.

Ricordiamo che, dal punto di vista analitico, f è una funzione **pari** se il suo dominio contiene il punto (i.e. il numero reale) $-x$ per ogni punto x contenuto in esso e inoltre

$$f(x) = f(-x) .$$

Dal punto di vista della loro rappresentazione geometrico-analitica su di un piano cartesiano (x, O, y) , le funzioni **pari** risultano simmetriche rispetto all'asse y .

Analiticamente f è una funzione **dispari** se il suo dominio contiene il punto (i.e. il numero reale) $-x$ per ogni punto x contenuto in esso e inoltre

$$f(x) = -f(-x) .$$

Dal punto di vista della loro rappresentazione geometrico-analitica su di un piano cartesiano (x, O, y) , le funzioni **dispari** risultano simmetriche rispetto all'origine O .

Riassumiamo qui sotto le loro proprietà fondamentali:

1. La somma (differenza) e il prodotto (quoziente) di due funzioni pari è pari.
2. La somma (differenza) di due funzioni dispari è dispari; il prodotto (quoziente) di due funzioni dispari è pari.
3. La somma (differenza) di una funzione pari e di una funzione pari non è né pari né dispari; il prodotto (quoziente) di due funzioni, una pari ed una dispari, è dispari.
4. Se f è una funzione pari, allora

$$\int_{-c}^c f(x)dx = 2 \int_0^c f(x)dx .$$

5. Se f è una funzione dispari, allora

$$\int_{-c}^c f(x)dx = 0 .$$

Serie dei coseni. Supponiamo che f e f' siano continue a pezzi su $-c \leq x < c$ e che f sia una funzione pari, periodica di periodo $2a$. Dalle proprietà **1** e **3** segue che $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$ è pari e che $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$ è dispari. In conseguenza i coefficienti della serie di Fourier sono

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx, & n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= 0, & n = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Così la serie di Fourier di f è data da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) . \quad (4.28)$$

In altri termini la serie di Fourier di una qualsiasi funzione pari consiste solo del termine costante e delle funzioni trigonometriche pari (armoniche pari) $\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$.

La serie (4.28) è detta **serie di Fourier dei coseni**.

Dal punto di vista del calcolo si osservi che è necessario calcolare solo i coefficienti a_n per $n = 0, 1, 2, \dots$, mentre i coefficienti b_n , con $n = 1, 2, \dots$ sono automaticamente nulli per ogni funzione pari e non è necessario calcolarli per integrazione.

Serie dei seni. Supponiamo che f e f' siano continue a pezzi su $-c \leq x < c$ e che f sia una funzione dispari, periodica di periodo $2a$. Dalle proprietà **1** e **3** segue che $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ è dispari e che $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ è pari. In conseguenza i coefficienti della serie di Fourier sono

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è quindi data da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right). \quad (4.29)$$

In altri termini la serie di Fourier di una qualsiasi funzione dispari consiste solo delle funzioni trigonometriche dispari (armoniche dispari) $\sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$. La serie (4.29) è detta **serie di Fourier dei seni**.

Le considerazioni sul calcolo sono analoghe alle precedenti: solo i coefficienti b_n devono essere calcolati, mentre tutti gli a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ sono identicamente nulli.

4.5 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Nel paragrafo 1.3 abbiamo visto in che senso gli elementi di X sono rappresentati da una serie di Fourier. In questo paragrafo vogliamo approfondire il concetto di convergenza ed i suoi diversi significati. Una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ **converge puntualmente** ad una funzione $f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \forall x \in I.$$

Dalla definizione dei coefficienti della serie di Fourier (si veda, per esempio, (4.17) e (4.21)), si vede immediatamente che essi sono definiti purché la funzione $f(x)$ sia integrabile (anche nel senso più generale di Lebesgue), dato che le funzioni trigonometriche e l'esponenziale ad argomento immaginario sono funzioni limitate. Se consideriamo quindi le funzioni (a valori reali o complessi) definite su $[-\pi, +\pi]$, che siano misurabili ed integrabili secondo Lebesgue, ovvero gli elementi dello spazio lineare (spazio di Banach) $X^1 := L^1([-\pi, +\pi])$, avremo che i coefficienti della serie di Fourier sono tutti ben definiti e limitati. Questo non vuol dire, però, che la serie di Fourier converga, e in quale senso eventualmente converga. Ad esempio la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ appartiene a X^1 ma non a X . Per essa non valgono dunque i risultati ottenuti per gli elementi di X , in particolare non vale il teorema per la convergenza quadratica ed il teorema di Parseval. Viceversa la funzione $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, anche se non è limitata, appartiene ad X e per essa valgono tali risultati. Consideriamo adesso lo spazio lineare delle funzioni (a valori reali o complessi) definite su $[-\pi, +\pi]$ e continue quasi ovunque. La continuità quasi ovunque (da adesso indicata con q.o.) significa che la funzione può avere al più un numero finito di discontinuità finite (salti) e che nei punti di discontinuità, dove può essere non definita, esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro. Indicheremo tale spazio con E . È evidente che esiste la relazione di inclusione $E \subset X \subset X^1$, ovvero che gli elementi di E sono funzioni il cui quadrato è integrabile e che sono integrabili. Considereremo E dotato del prodotto scalare di X e della sua norma. Questo ne fa uno spazio unitario, ma non completo (le successioni di Cauchy di elementi di E in generale non convergono ad un elemento di E , ma ad uno di X). Enunciamo adesso, e dimostriamo, il teorema fondamentale sulla convergenza puntuale della serie di Fourier. Le ipotesi che richiede sono più restrittive rispetto alla richiesta che la funzione f appartenga allo spazio E sopra definito. Occorre infatti che in ogni punto $x \in [-\pi, +\pi]$, sia che esso sia un punto di continuità che di discontinuità, esistano finite sia la derivata destra che la derivata sinistra,

i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h}, \quad \text{esistono ed hanno valori finiti,} \quad (4.30)$$

dove $f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$ e $f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x-h)$ rappresentano, rispettivamente, il limite destro e sinistro della f nel punto x . Avremo, ovviamente che se la f è continua in x , allora $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ e se vi è derivabile $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Prima di presentare il teorema, ricordiamo nuovamente che, anche se l'enunciato, per scelta di semplicità, riguarda funzioni a valori reali definite sull'intervallo $[-\pi, +\pi]$ (e quindi considereremo serie di Fourier reali), esso vale, con piccoli cambiamenti nella dimostrazione, per funzioni definite su un intervallo qualunque e per funzioni periodiche di un qualsiasi periodo, aventi le stesse proprietà richieste nelle ipotesi. Il teorema si enuncia allo stesso modo, con le stesse ipotesi anche per funzioni a valori complessi, purché nella dimostrazioni si usi la base ortonormale delle funzioni esponenziali ad argomento immaginario.

Teorema di Dirichlet 4.5.1 *Siano date le seguenti ipotesi:*

(A1) $f \in E$;

(A2) *esistano finite in ogni punto $x \in [-\pi, +\pi]$ la derivata destra e la derivata sinistra di f , allora la serie di Fourier di f converge al valore*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}. \quad (4.31)$$

Prova: *Osserviamo prima di tutto che se la f è continua in x , allora $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = f(x)$ e si ha la convergenza puntuale della serie.*

Per quanto riguarda la tesi sopra esposta, dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N(x) - f(x)| = 0, \quad (4.32)$$

dove

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \text{ e}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nxdx \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nxdx \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Esprimiamo $S_N(x)$ nella sua forma integrale, per mezzo del nucleo di Dirichlet (Appendice 2):

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt .$$

Dobbiamo dunque provare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - f(x) \right| = 0 . \quad (4.33)$$

Sempre in Appendice 2 è provato che $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \pi$, quindi, (4.33) non cambia se al posto di $f(x)$ poniamo $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$ dovendo adesso dimostrare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| = 0 . \quad (4.34)$$

Studiamo adesso l'integrale in (4.34), che riscriviamo nella forma

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt . \quad (4.35)$$

Se in (4.35) operiamo il cambiamento di variabile di integrazione da t in $-t$, lo stesso integrale può essere scritto come

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt . \quad (4.36)$$

Sommando (4.35) con (4.36) avremo quindi che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt = 2[S_N(x) - f(x)] . \quad (4.37)$$

Ma la funzione integranda è una funzione pari, quindi vale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt = [S_N(x) - f(x)] . \quad (4.38)$$

Poiché la $f(x)$ è una funzione regolare q.o. (il che significa che è continua q.o. e che in ogni punto esistono finite almeno la derivata destra e sinistra), ridefiniamola nei punti di discontinuità come

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} . \quad (4.39)$$

Questa posizione non cambia il valore di $S_N(x)$, perché i suoi coefficienti sono definiti da integrali, che non risentono quindi di variazioni di definizione di $f(x)$ in un numero finito di punti. L'integrale (4.38) può quindi essere riscritto come

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \left[\frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Prendiamo in esame il primo integrale di (4.40) (per il secondo le considerazioni sono del tutto analoghe) e proviamo che la funzione

$$g^+(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (4.41)$$

è una funzione continua q.o. . Poiché la $f \in E$, l'unico problema può nascere per $t = 0$. Ma

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} = 1 \quad (4.42)$$

ed il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad (4.43)$$

esiste finito per l'ipotesi **A2**. Osserviamo adesso che se la funzione $g^+(t) \in E$, allora anche $g^+(t) \sin \frac{t}{2}$ e $g^+(t) \cos \frac{t}{2}$ appartengono ad E . Definiamo quindi le funzioni

$$h_1^+(t) = \begin{cases} g^+(t) \sin \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, 0) \end{cases}, \quad h_2^+(t) = \begin{cases} g^+(t) \cos \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Poiché $\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t = \cos Nt \sin \frac{t}{2} + \sin Nt \cos \frac{t}{2}$, il primo integrale in (4.40) può quindi essere scritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt = \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h_1^+(t) \cos Nt dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h_2^+(t) \sin Nt dt , \end{aligned} \quad (4.44)$$

dove i due integrali in (4.44) non sono altro che i coefficienti di Fourier di due funzioni continue q.o., che, per il lemma di Riemann-Lebesgue, tendono a 0 per $N \rightarrow \infty$.

Ripetendo lo stesso procedimento per il secondo integrale in (4.40), il risultato è lo stesso, per cui il teorema è dimostrato.

Osservazione: è evidente che la serie di Fourier, sotto le ipotesi del teorema converge puntualmente in tutti i punti di $(-\pi, +\pi)$ dove la f è continua⁵. Per quanto riguarda gli estremi $-\pi$ e $+\pi$ dell'intervallo, essi non costituiscono dei casi particolari. Infatti, pensando all'estensione periodica (di periodo 2π) di una funzione appartenente ad E , avremo che, se $f(-\pi) = f(\pi)$, allora la serie convergerà a tale valore per $x = -\pi$ e per $x = \pi$. Viceversa, in caso di discontinuità o di non definizione della f agli estremi, avendo (per la periodicità) $f(-\pi^+) = f(+\pi^+)$, la serie di Fourier convergerà a $\frac{f(+\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$. ■

4.6 Il fenomeno di Gibbs

Il così detto fenomeno di Gibbs⁶ mette bene in luce la differenza fra convergenza puntuale e convergenza uniforme (si veda il paragrafo successivo). Quando si pensa la convergenza puntuale di una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ ad una funzione $f(x)$, spesso la si immagina come una convergenza dei grafici delle f_n al crescere di n , in modo da sovrapporsi sempre meglio al grafico della funzione limite f . Questo è vero per la convergenza uniforme, ma in generale non per la convergenza puntuale. **Il fatto che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$ e per ogni x (nel dominio di definizione) non vuol dire che la convergenza abbia la stessa velocità in tutti i punti**. Limitandoci ai problemi di convergenza della serie di Fourier (ma, come già detto, la questione è più generale), si osserva che nell'intorno di un punto dove la funzione f ha una discontinuità finita (salto finito) le somme parziali S_N della serie di Fourier mostrano un comportamento di "overshoot" (sovralongazione) vicino a questi punti. Al crescere di n l'overshoot non diminuisce, ma si manifesta in intervalli via via sempre più piccoli. Ricordiamo che sotto le condizioni del teorema di Dirichlet si ha la garanzia della convergenza puntuale dove la funzione è continua, ma anche nei punti di "salto" la successione delle somme parziali converge al valore $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, per cui, assegnando alla funzione questo valore in tali punti, si ha convergenza puntuale su tutto l'intervallo. Tuttavia i grafici corrispondenti alle somme parziali (anche per valori grandi di N) non sembrano convergere al grafico della funzione limite, ma mantengono una sovralongazione rispetto al valore della funzione limite che è circa il 9% del salto esibito dalla funzione.

⁵Se x è un punto in cui f è continua, allora, per definizione $f(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

⁶Josiah Willard Gibbs, ingegnere, chimico e fisico statunitense (New Haven, 11 febbraio 1839 - 28 aprile 1903).

In effetti è possibile dimostrare che

Teorema 4.6.1 *Sia f una funzione che rispetta le ipotesi **A1** e **A2** del teorema di Dirichlet e \bar{x} un suo punto di discontinuità, allora esiste $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, una successione di $x_k > \bar{x}$, t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k(x_k) - f(x_k)}{f(\bar{x}^+) - f(\bar{x}^-)} \geq 0.089 .$$

Simmetricamente si prova che esiste $\{x_h\}_{h=1}^{\infty}$, una successione di $x_h < \bar{x}$, t.c. $\lim_{h \rightarrow \infty} x_h = \bar{x}$ e

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{S_h(x_h) - f(x_h)}{f(\bar{x}^+) - f(\bar{x}^-)} \leq -0.089 . \quad \blacksquare$$

Nella Fig.3.3 è mostrato il grafico della funzione che rappresenta 10 termini della somma parziale di Fourier di una funzione del tipo “a dente di sega”, definita come $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in [-\pi, +\pi]$ Si notino le caratteristiche “orecchie” che si formano vicino al punto di discontinuità.

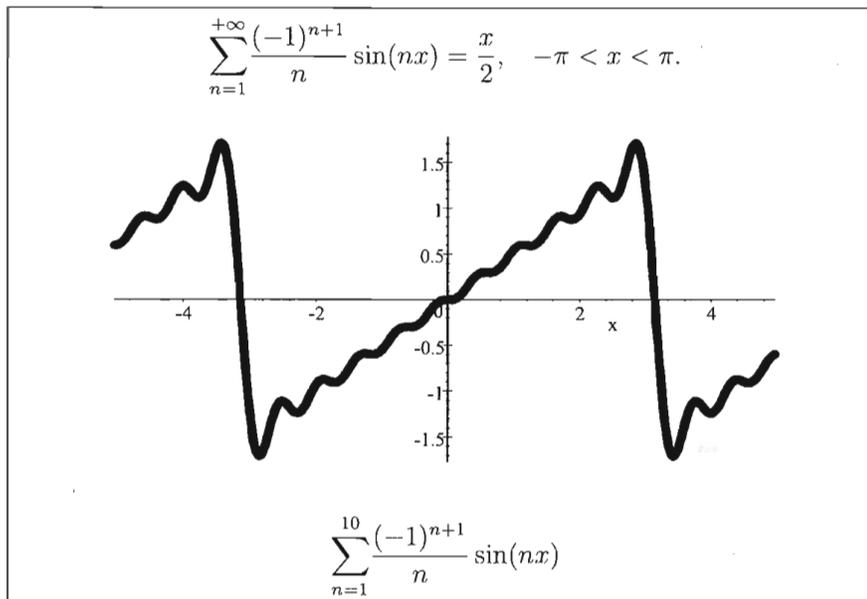


Figura 4.3 *Onda a dente di sega*

Nella Fig.3.4 è riportato il grafico della funzione che rappresenta 10 termini della somma parziale di Fourier di una funzione del tipo “onda quadra”.

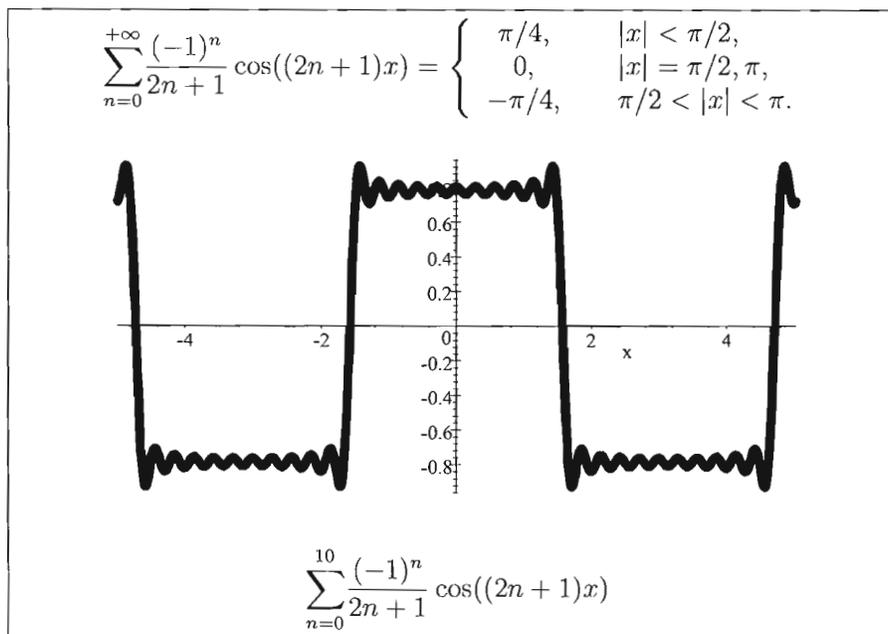


Figura 4.4 Onda quadra

4.7 Convergenza uniforme ed altri risultati di convergenza

In questo paragrafo daremo ulteriori risultati di convergenza, a partire da quello fondamentale che riguarda la convergenza uniforme delle somme parziali della serie di Fourier. La convergenza uniforme, che intuitivamente corrisponde alla convergenza dei grafici delle somme parziali al grafico della funzione limite, richiede la definizione di norma uniforme:

DEFINIZIONE 4.1 *Norma uniforme* Si dice che una funzione è limitata in un intervallo I se esiste un numero reale M , tale che $|f(x)| \leq M$. Il più piccolo dei limiti superiori di $f(x)$ è detto **norma uniforme** di $f(x)$ ed è indicato come $N(f)$.

DEFINIZIONE 4.2 *Convergenza uniforme di una successione di funzioni* Una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ **converge uniformemente** ad una funzione $f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ se e solo se $N(f_n - f)$ è definita, a parte un eventuale numero di termini f_n (che possiamo ignorare), e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(f_n(x) - f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Possiamo adesso enunciare il teorema fondamentale sulla convergenza uniforme della serie di Fourier:

Teorema della convergenza uniforme 4.7.1 *Sia f una funzione continua su tutto $[-\pi, +\pi]$, t.c. $f' \in E$ (che abbia cioè derivata prima continua q.o.) e che $f(-\pi) = f(+\pi)$, allora la serie di Fourier della f converge uniformemente ad f su tutto $[-\pi, +\pi]$. ■*

Concludiamo il paragrafo con gli enunciati (senza dimostrazione) di alcuni risultati fondamentali per la convergenza della serie di Fourier.

Teorema di integrazione termine a termine 4.7.2 *Sia $f \in E$ una funzione, la cui serie di Fourier è data da*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

allora $\forall x \in [-\pi, +\pi]$ la serie è integrabile termine a termine e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x f(s) ds &= (x + \pi) \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} (\cos nx - \cos n\pi) \\ &= (x + \pi) \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} (\cos nx - (-1)^n) ; \end{aligned}$$

inoltre la serie integrata converge uniformemente alla funzione a sinistra del segno uguale. ■

Teorema di derivazione termine a termine 4.7.3 *Siano $f \in E$ e $f' \in E$. Allora se la serie di Fourier di f è*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

essa è derivabile termine a termine in tutto $[-\pi, +\pi]$ e la serie derivata è data da:

$$f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx . \quad \blacksquare$$

Comportamento dei coefficienti 4.7.4 *Se a_n e b_n $n = 1, 2, \dots$ sono successioni positive, monotone decrescenti e tendono a zero, la serie di Fourier converge in tutti i punti, tranne al più gli estremi dell'intervallo. Non è però garantita la continuità della funzione somma $f(x)$.*

- i) Se $f(x)$ è solo continua a tratti, allora i coefficienti della serie di Fourier decrescono come $\frac{1}{n}$;
 ii) se $f(x)$ è continua, ma la sua derivata è discontinua, allora i coefficienti della serie di Fourier decrescono come $\frac{1}{n^2}$;
 iii) se $f(x)$ e tutte le sue derivate sono continue fino all'ordine m , allora i coefficienti della serie di Fourier decrescono come $\frac{1}{n^{m+2}}$. ■

4.8 Applicazioni alle Equazioni Differenziali a Derivate Parziali

In questo paragrafo studieremo due classici problemi della Fisica Matematica, che conducono ad equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine. In entrambi i casi, valgono teoremi di esistenza ed unicità globale per la soluzione dei problemi che saranno considerati.

I Equazione unidimensionale delle onde.

Introduciamo l'equazione delle onde a partire da un semplice esempio in Meccanica dei sistemi continui. L'equazione che otterremo è la stessa che serve per trattare i problemi di propagazione in Elettromagnetismo.

Il modello

Consideriamo una corda di lunghezza ℓ e densità costante ρ , disposta orizzontalmente e fissata ad i suoi estremi. Prendiamo in esame un tratto fra i valori x ed $x + \Delta x$ dell'ascissa che individua i punti della corda, sollecitato dalle forze $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, t)$ e $\mathbf{T}' = \mathbf{T}(x + \Delta x, t)$, che ne provocano un movimento verticale (i movimenti in senso orizzontale sono vietati dai vincoli posti agli estremi).

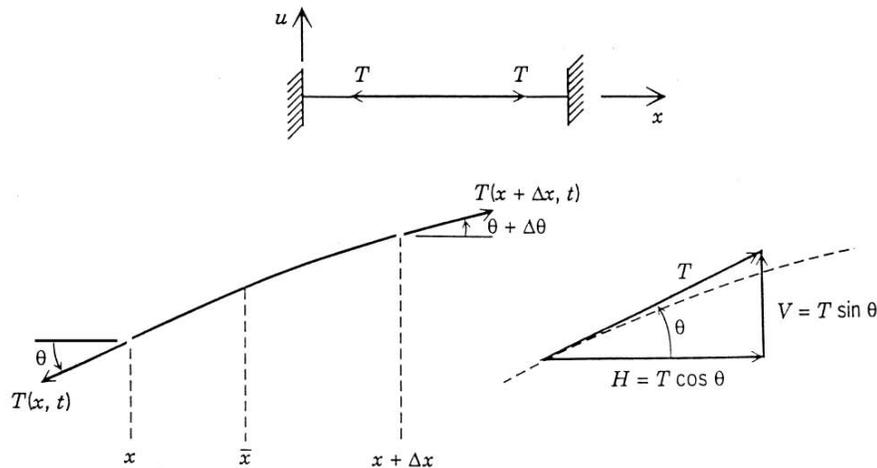


Figura 4.5

Posto $T = |\mathbf{T}|$, per l'equilibrio orizzontale abbiamo:

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) - T(x, t) \cos \vartheta = 0, \quad (4.45)$$

dove ϑ è l'angolo che la retta tangente alla corda forma con l'orizzontale. Se indichiamo con $H(x, t)$ e $V(x, t)$ le componenti orizzontale e verticale della tensione \mathbf{T} :

$$H(x, t) = T(x, t) \cos \vartheta, \quad V(x, t) = T(x, t) \sin \vartheta,$$

la (4.45) diviene:

$$H(x + \Delta x, t) - H(x, t) = 0.$$

Se ne deduce che $H = H(t)$ è indipendente da x .

Indichiamo adesso con u lo spostamento verticale della corda (avremo in generale che u dipende da x e t , $u = u(x, t)$), e poniamo $u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ (useremo, per semplicità, questo simbolismo per tutte le derivate parziali). Scriviamo adesso l'equazione valida per tale componente:

$$V(x + \Delta x, t) - V(x, t) = (\rho \Delta x) u_{tt}(\hat{x}, t), \quad (4.46)$$

dove \hat{x} è il centro di massa del tratto di corda Δx considerato e $u_{tt}(\hat{x}, t)$ ne rappresenta l'accelerazione. $\rho \Delta x$ rappresenta la massa del tratto di corda considerato. Dividendo ambo i membri della (4.46) per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ (che implica $\hat{x} \rightarrow x$), la (4.46) diviene:

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \quad (4.47)$$

Possiamo esprimere l'equazione (4.47) per mezzo della sola variabile dipendente u , ricordando che $V(x, t) = H(t) \tan \vartheta$ e che $\tan \vartheta = u_x(x, t)$.

Come conseguenza $V_x(x, t) = (H u_x)_x = H u_{xx}$ ed inoltre, poiché $H = T \cos \vartheta$, possiamo porre, per ϑ piccolo, $H = T$. La (4.47) prende quindi la forma:

$$\frac{T}{\rho} u_{xx} = u_{tt}. \quad (4.48)$$

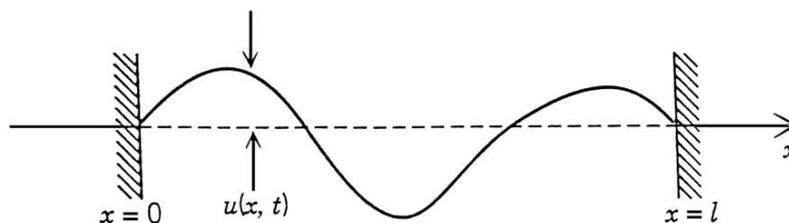


Figura 4.6

L'equazione

Consideriamo l'equazione (4.48), che riscriviamo nella forma:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (4.49)$$

dove c è un parametro che ha le dimensioni di una velocità.

Possiamo risolvere l'equazione (4.49) imponendo le opportune condizioni al contorno ed iniziali. Gli estremi della corda fissati impongono la condizione:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Vanno poi assegnate due condizioni iniziali indipendenti (si tratta di un'equazione del II ordine rispetto al tempo), del tipo:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

dove, ovviamente $f(0) = f(\ell) = 0$, $g(0) = g(\ell) = 0$.

Studiamo quindi il seguente problema, il cui dominio è illustrato dalla figura 3.6:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \ell, \quad f(0) = f(\ell) = 0 \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Per la soluzione di (4.50) utilizziamo il **metodo di separazione delle variabili**, cercando soluzioni della forma

$$u(x, t) = X(x)Y(t) . \quad (4.51)$$

Introducendo la (4.51) nella (4.50), si ottiene:

$$c^2 Y \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d^2 Y}{dt^2} ,$$

e, quindi, ponendo $X'' = \frac{d^2 X}{dx^2}$ e $Y'' = \frac{d^2 Y}{dt^2}$:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{Y''}{Y} = -\sigma ,$$

dove σ risulta essere una costante, perché i due membri dell'equazione precedente dipendono da due variabili fra loro indipendenti. Quindi la (4.50) è equivalente alla coppia di equazioni differenziali ordinarie

$$X'' + \sigma X = 0 , \quad (4.52)$$

$$Y'' + \sigma c^2 Y = 0 \quad (4.53)$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali ed al contorno da dedurre da quelle presenti nella (4.50). Per quanto riguarda le condizioni al contorno avremo

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)Y(t) = 0 \implies X(0) = 0 , \\ u(\ell, t) = X(\ell)Y(t) = 0 \implies X(\ell) = 0 . \end{cases} \quad (4.54)$$

mentre per quelle iniziali avremo

$$\begin{cases} u(x, 0) = X(x)Y(0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = X(x)Y'(0) = 0 , \end{cases} \quad (4.55)$$

dove, per semplicità abbiamo posto $g(x) \equiv 0$.

Risolviamo adesso (4.52) con le condizioni (4.54) e studiamo i tre possibili casi:

1) $\sigma = 0$:

la soluzione generale è

$$X = c_1 x + c_2 .$$

Per soddisfare le condizioni al contorno occorre che

$$c_2 = 0 , \quad c_1 \ell + c_2 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0 .$$

Otteniamo quindi la soluzione “banale”, $X \equiv 0$.

2) $0 > \sigma = -\lambda^2$:

l'equazione (4.52) prende la forma

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

e la sua soluzione generale è

$$X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

Per soddisfare le condizioni al contorno in $x = 0$:

$$X(0) = c_1 \cosh 0 + c_2 \sinh 0 = c_1 = 0.$$

Quindi

$$X(x) = c_2 \sinh \lambda x.$$

Per soddisfare le condizioni al contorno in $x = \ell$:

$$X(\ell) = c_2 \sinh \lambda \ell = 0.$$

Poiché sia λ che ℓ sono positivi, anche $\sinh \lambda \ell > 0$, il che comporta necessariamente che $c_2 = 0$. La soluzione è quindi ancora quella “banale”, $X \equiv 0$.

3) $0 < \sigma = \lambda^2$:

l'equazione (4.52) prende la forma

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

e la sua soluzione generale è

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Per soddisfare le condizioni al contorno in $x = 0$:

$$X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0,$$

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x.$$

Per soddisfare le condizioni al contorno in $x = \ell$:

$$X(\ell) = c_2 \sin \lambda \ell = 0.$$

Oltre alla soluzione $X \equiv 0$ ci sono le soluzioni

$$\sin \lambda \ell = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

L'insieme infinito (numerabile) dei numeri reali

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$$

costituisce l'insieme degli autovalori per il problema ai valori al contorno (4.52)+(4.54), mentre le funzioni

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

formano l'insieme delle autofunzioni corrispondenti.

Se sostituiamo in (4.53) il valore di σ che risolve (4.52)+(4.54) (i.e. $\sigma_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$), otteniamo che la soluzione generale dell'equazione (4.53) deve risultare dalla combinazione lineare delle funzioni $\cos \frac{n\pi c}{\ell} t$ e $\sin \frac{n\pi c}{\ell} t$.

Quindi, funzioni del tipo

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi c}{\ell} t, \quad n = 1, 2, \dots$$

e

$$v_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi c}{\ell} t, \quad n = 1, 2, \dots$$

soddisfano entrambe le equazioni (4.52) (4.53) e le condizioni al contorno (4.54). Restano però da soddisfare le condizioni iniziali (4.55). Per la linearità del problema ogni combinazione lineare finita di u_n e v_n è ancora soluzione, ma non è detto che possa soddisfare le (4.55) (questo dipende evidentemente dalla forma della $f(x)$) o condizioni più generali.

Utilizzeremo quindi una combinazione lineare di infiniti termini (serie di Fourier):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n u_n(x, t) + b_n v_n(x, t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x [a_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Se imponiamo ad (4.56) di soddisfare la prima delle condizioni (4.55), otteniamo

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

I coefficienti b_n sono quindi i coefficienti della serie di Fourier dei seni di periodo 2ℓ , determinati dalla funzione $f(x)$:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

Assumiamo che (4.56) sia derivabile termine a termine:

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left[a_n \frac{n\pi c}{\ell} \cos \frac{n\pi c}{\ell} t - b_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi c}{\ell} t \right]. \quad (4.58)$$

Imporre la seconda delle condizioni iniziali (4.55) permette di determinare i coefficienti a_n :

$$u_t(x, 0) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x = 0.$$

I coefficienti $a_n \frac{n\pi c}{\ell}$ sono quindi i coefficienti della serie di Fourier dei seni di periodo 2ℓ per la funzione identicamente nulla. Si prova (formula di Eulero-Fourier) che $a_n \equiv 0$ per tutti gli n .

La soluzione del problema (4.50) (con $g(x) \equiv 0$) (Eulero 1749, Daniel Bernoulli ⁷ 1753), equivalente al problema (4.52)+(4.53)+(4.54)+(4.55), ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi c}{\ell} t. \quad (4.59)$$

Fissato n il termine $\sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi c}{\ell} t$ è periodico nel tempo, con periodo

$$T = T_n = \frac{2\ell}{nc}$$

e frequenza

$$\nu = \nu_n = \frac{nc}{2\ell}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

le ν_n sono dette **frequenze naturali** della corda. Il periodo T_n più piccolo per cui si verifica che $u(x, t) = u(x, t + T_n)$ è detto **periodo fondamentale**. Il fattore $b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ rappresenta il profilo degli spostamenti che hanno luogo nella corda quando questa vibra alla frequenza ν_n . Ogni fattore $b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ è detto **modo naturale** di vibrazione ed è periodico nella variabile spaziale x . Il periodo spaziale

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

è detto **lunghezza d'onda** del modo di frequenza $\nu_n = \frac{nc}{2\ell}$.

Onde

La soluzione del problema ai valori iniziali ed al contorno (4.50) è fornito dalla serie di soluzioni fondamentali

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi c}{\ell} t, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$v_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi c}{\ell} t, \quad n = 1, 2, \dots$$

dove c è la velocità (**velocità di fase**) dell'onda.

⁷Daniel Bernoulli, matematico svizzero (Groninga, 29 gennaio 1700 - Basilea, 27 luglio 1782).

Utilizzando le formule di prostaferesi (si veda l'Appendice 1), possiamo riscrivere le soluzioni fondamentali nella forma seguente:

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{\ell} (x - ct) \right) - \cos \left(\frac{n\pi}{\ell} (x + ct) \right) \right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$v_n(x, t) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{n\pi}{\ell} (x + ct) \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} (x - ct) \right) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

A partire dalla nuova forma qui sopra riportata, introduciamo la definizione di **vettore d'onda**:

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}.$$

Possono essere ridefiniti per mezzo di k_n i parametri fisici precedentemente definiti:

$$\text{lunghezza d'onda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n};$$

$$\text{periodo} \quad \Longrightarrow \quad T_n = \frac{2\pi}{ck_n};$$

pulsazione $\Longrightarrow \omega_n = 2\pi\nu_n = ck_n$; dall'ultima risulta in modo ovvio la relazione fra velocità di fase, vettore d'onda e frequenza:

$$c = \frac{\omega_n}{k_n}.$$

Le soluzioni fondamentali u_n e v_n possono quindi essere scritte come combinazioni lineari di soluzioni del tipo $f(k_n x - \omega_n t)$ e $f(k_n x + \omega_n t)$, dove f è una funzione armonica (si veda L'Appendice 3).

Equazione unidimensionale del calore o della diffusione.

Alcuni fenomeni fisici noti sotto il nome di diffusione portano, nel caso unidimensionale, alla seguente equazione lineare del secondo ordine, a derivate parziali:

$$u_t = k^2 u_{xx}. \quad (4.60)$$

Ad esempio, consideriamo la concentrazione (cioè la densità) ρ di una qualche sostanza dentro un mezzo di sostegno (un liquido oppure un mezzo gassoso). La I legge di Fick⁸ dice che si manifesta un flusso della sostanza dalla regione a più alta concentrazione a quella a minore concentrazione, proporzionale al gradiente della concentrazione stessa. Nel caso di un dominio tridimensionale, la formulazione differenziale della I legge di Fick si traduce nell'equazione

$$J_\rho = -D\nabla\rho, \quad (4.61)$$

⁸Adolf Eugen Fick, fisiologo tedesco (Kassel, 3 settembre 1829 - Blankenberge (Belgio), 21 agosto 1901)

dove ∇ è il gradiente, J_ρ rappresenta il flusso di densità e D il coefficiente di diffusione. Se alla precedente aggiungiamo la legge di conservazione della massa (teorema della divergenza)⁹:

$$\rho_t + \nabla \cdot J_\rho = 0, \quad (4.62)$$

dove $\nabla \cdot$ è la divergenza, si ottiene immediatamente l'equazione

$$\rho_t = \nabla \cdot (D\nabla\rho),$$

che, per D costante si riduce a

$$\rho_t = D\Delta\rho,$$

dove Δ rappresenta il laplaciano¹⁰ e che, nel caso unidimensionale, con $u = \rho$ e $k^2 = D$ si riconduce all'equazione (4.60).

Un altro fenomeno fisico che porta all'equazione (4.60) è la legge di Fourier per la conduzione del calore. La legge fu formulata nell'ambito del paradigma¹¹ (si intende con paradigma il quadro di riferimento delle teorie scientifiche accettate come valide in quel momento storico) del fluido calorico, prima cioè che il calore fosse riconosciuto come una forma di energia "in transito" e che fossero stabiliti ed accettati il II ed il I (in ordine cronologico) Principio della Termodinamica.

Limitandoci al caso unidimensionale, ad esempio la propagazione lungo una sbarra metallica omogenea, di lunghezza ℓ , la legge di Fourier afferma che il flusso di calore J_Q è proporzionale al gradiente della temperatura T e fluisce dalla regione a temperatura più alta verso quella a temperatura più bassa:

$$J_Q = -K \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.63)$$

dove K è il coefficiente di conducibilità termica. Essendo però il calore considerato come un fluido, varrà ancora una legge di conservazione del tipo

⁹L'equazione di continuità vale per tutte quelle grandezze fisiche scalari per le quali vale un Principio di conservazione, quali ad esempio la massa, la carica, etc.. . Fissata una regione chiusa C nello spazio, la variazione di massa contenuta in C è dovuta al bilancio fra il flusso entrante e quello uscente: $\frac{\partial}{\partial t} \int_C \rho(P, t) dC = - \int_{\partial C} \mathbf{v}\rho(P, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma_C$ dove ρ rappresenta la densità di massa, ∂C è la superficie di C , \mathbf{n} è la normale esterna, $\mathbf{v}\rho(P, t) = \mathbf{j}_\rho$ la corrente (o flusso) di massa. Applicando il Teorema di Gauss o della divergenza - Carl Friedrich Gauss, matematico, astronomo e fisico tedesco (Braunschweig, 30 aprile 1777 - Göttinga, 23 febbraio 1855)- si arriva alla formulazione differenziale (4.62).

¹⁰Il laplaciano $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, da Pierre-Simon Laplace, marchese di Laplace, matematico, fisico e astronomo francese (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 - Parigi, 5 marzo 1827).

¹¹si veda Thomas Khun, "La struttura delle rivoluzioni scientifiche", Torino, Einaudi, 1979.

(4.62), che, nel caso unidimensionale, si scrive:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial J_Q}{\partial x} = 0. \quad (4.64)$$

Sostituendo (4.63) in (4.64) con $u = T$ e $K = k^2$, considerato costante, si ottiene di nuovo la (4.60).

Possiamo risolvere l'equazione (4.60) imponendo le opportune condizioni al contorno ed iniziali. Consideriamo gli estremi della sbarra a temperatura zero:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Si assegna poi una condizione iniziale (l'equazione è del primo ordine rispetto al tempo), del tipo:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

dove, ovviamente $f(0) = f(\ell) = 0$.

Studiamo quindi il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad f(0) = f(\ell) = 0 \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

Per la soluzione di (4.65) utilizziamo, analogamente a quanto fatto per l'equazione unidimensionale delle onde, il **metodo di separazione delle variabili**, cercando soluzioni della forma

$$u(x, t) = X(x)Y(t). \quad (4.66)$$

Introducendo la (4.66) nella (4.65), si ottiene:

$$k^2 Y \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{dY}{dt},$$

e, quindi, ponendo $X'' = \frac{d^2 X}{dx^2}$ e $Y' = \frac{dY}{dt}$:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k^2} \frac{Y'}{Y} = -\sigma,$$

dove σ risulta essere una costante, perché i due membri dell'equazione precedente dipendono da due variabili fra loro indipendenti. Quindi la (4.65) è equivalente alla coppia di equazioni differenziali ordinarie

$$X'' + \sigma X = 0, \quad (4.67)$$

$$Y' + \sigma k^2 Y = 0 \quad (4.68)$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali ed al contorno da dedurre da quelle presenti nella (4.65). Per quanto riguarda le condizioni al contorno avremo

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)Y(t) = 0 \implies X(0) = 0, \\ u(\ell, t) = X(\ell)Y(t) = 0 \implies X(\ell) = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

mentre per quelle iniziali avremo

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = f(x), \quad (4.70)$$

Risolviamo adesso (4.67) con le condizioni (4.69). Come nel caso dell'equazione delle onde, se $\sigma \leq 0$ otteniamo solo la soluzione "banale", $X \equiv 0$. Il caso $\sigma > 0$ porta invece le infinite soluzioni

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'equazione (4.68) ammette invece soluzioni del tipo $Y(t) = \exp(-\sigma k^2 t)$, che con la determinazione di $\sigma = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$ imposta dalla soluzione della (4.67) porta al set di soluzioni

$$Y_n(t) = e^{-k^2 \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t}.$$

Funzioni del tipo

$$u_n(x, t) = X_n(x)Y_n(t) = e^{-k^2 \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

risolvono quindi sia l'equazione che le condizioni al contorno. Per la linearità del problema, analogamente a quanto visto per l'equazione delle onde, le $u_n(x, t)$ costituiscono un insieme numerabile di soluzioni fondamentali per il problema (4.65). Ogni loro combinazione lineare è soluzione dell'equazione e delle condizioni al contorno, ma resta da soddisfare il problema ai valori iniziali, cioè

$$u(x, 0) = f(x).$$

Una combinazione lineare finita delle $u_n(x, t)$ non è in generale sufficiente, ma se $f \in L^2([0, \ell])$, la condizione iniziale è soddisfatta da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

dove i b_n sono i coefficienti della serie di Fourier dei seni della $f(x)$ sull'intervallo $[0, \ell]$.

4.9 Appendice 1

Ricordiamo le formule fondamentali:

$$\sin(n + m)x = \sin nx \cos mx + \cos nx \sin mx ,$$

$$\cos(n + m)x = \cos nx \cos mx - \sin nx \sin mx ,$$

$$\sin(n - m)x = \sin nx \cos mx - \cos nx \sin mx ,$$

$$\cos(n - m)x = \cos nx \cos mx + \sin nx \sin mx ,$$

Sommando la prima con la terza si ottiene

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n + m)x + \sin(n - m)x] ,$$

sottraendo la seconda dalla quarta

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(n - m)x - \cos(n + m)x] ,$$

sommando la seconda con la quarta

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n + m)x + \cos(n - m)x] ,$$

La dimostrazione delle relazioni di ortonormalità risulta adesso immediata; infatti

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(n - m)x - \cos(n + m)x] dx = 0 \quad \forall n, m \in N,$$

per la periodicità 2π delle funzioni integrande. Lo stesso accade per $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx dx$ e $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx dx$, $\forall n \neq m$.

Al contrario, se $n = m$, utilizzando le formule precedenti, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos 0 - \cos 2nx] dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 0 dx = \pi$$

e

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos 0 + \cos 2nx] dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 0 dx = \pi .$$

Alternativamente, integrando per parti si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx dx = -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx d(\cos nx) = -\frac{\sin nx \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx dx .$$

Poiché $\sin nx \cos nx \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0$ si ha

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \sin^2 nx) dx .$$

In conclusione

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx dx = \pi .$$

Analogamente si ottengono $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx dx = \pi$ e tutte le altre relazioni di ortogonalità.

Il sistema (4.9) si ottiene da (4.8) mediante le formule di Eulero, che qui ricordiamo:

$$\cos nx + i \sin nx = e^{+inx}$$

$$\cos nx - i \sin nx = e^{-inx} .$$

L'ortonormalità di (4.9) si prova immediatamente, ricordando le definizioni (4.2) e (4.3):

$$\langle g_n, g_m \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{e^{+inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-imx}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikx} dx , \quad (4.71)$$

dove $n - m = k \in \mathbb{Z}$. Per $n = m \rightarrow k = 0$ la (4.9) dà immediatamente

$$\langle g_n, g_n \rangle = \|g_n\| = 1 ,$$

mentre se $n \neq m \rightarrow k \neq 0$ la (4.9) è 0 per la periodicità 2π delle funzioni e^{ikx} .

Riprendiamo la forma reale per la serie di Fourier della funzione $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Utilizzando le formule di Eulero inverse, i.e.

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} ,$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} ,$$

e sostituendo nella (1.1), si ottiene

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{inx}, \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

dove, nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo utilizzato $\frac{1}{i} = -i$. Poniamo adesso

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \frac{a_0}{2} \\
 \gamma_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n > 0 \\
 \gamma_n &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad n < 0
 \end{aligned}$$

La (1.11) può quindi essere scritta nella forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} \quad (4.73)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (4.74)$$

perché

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in'x} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n' \neq n \\ 2\pi & \text{se } n' = n. \end{cases}$$

4.10 Appendice 2

Il nucleo di Dirichlet

Consideriamo la somma parziale della serie di Fourier $S_N(x)$, nel caso di funzioni definite su $[-\pi, +\pi]$ o periodiche di periodo 2π :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx. \quad (4.75)$$

Sostituendo ai coefficienti a_0, a_n, b_n la loro espressione integrale

$$\begin{aligned}
 S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s) ds + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s) \cos ns ds \right) \cos nx + \\
 &\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s) \sin ns ds \right) \sin nx = \\
 &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx) \right] ds = \\
 &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(s-x) \right] ds .
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Poniamo $t = s - x$, il che implica $dt = ds$. L'intervallo di integrazione in (4.76) diventa $[-\pi - x, +\pi - x]$, ma per la periodicit  2π di tutte le funzioni in (4.76), avremo che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{+\pi+x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] dt . \tag{4.77}$$

Definiamo nucleo di Dirichlet $D_N(t)$ la sommatoria presente nella precedente espressione, che scriviamo in modo esplicito:

$$D_N(t) := \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Nt . \tag{4.78}$$

Ricordando, dalle formule di Werner ¹², che

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] , \tag{4.79}$$

avremo che

$$\cos nt \sin \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right] . \tag{4.80}$$

¹²Johann Werner, cartografo e matematico tedesco (Norimberga, 14 febbraio 1468 - Norimberga, maggio 1522).

Possiamo quindi valutare la (4.78) per mezzo della (4.80). Se moltiplichiamo $D_N(t)$ per $\sin \frac{t}{2}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sin \frac{t}{2} D_N(t) &= \sin \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] = \sin \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Nt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \cos t \sin \frac{t}{2} + \cos 2t \sin \frac{t}{2} + \dots + \cos Nt \sin \frac{t}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{t}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right] + \dots + \frac{1}{2} \left[\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(N - \frac{1}{2} \right) t \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t . \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$D_N(t) = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} . \quad (4.81)$$

Osserviamo infine che

$$\int_{-\pi}^{+\pi} D_N(t) dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dt}{2} + \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos t + \cos 2t + \dots + \cos Nt) dt = \pi \quad (4.82)$$

essendo nullo il secondo integrale.

4.11 Appendice 3

La soluzione di d'Alembert per l'equazione delle onde

Consideriamo l'equazione delle onde unidimensionale (4.49). È facile verificare che ogni funzione del tipo $f(x - ct)$ e $g(x + ct)$ sono sue soluzioni: Per la linearità della (4.49) segue immediatamente che funzioni della forma:

$$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) .$$

Infatti, posto $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$, avremo

$$\phi_t = -c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta} , \quad \phi_x = \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta}$$

e

$$\phi_{tt} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + c^2 \frac{d^2 g}{d\eta^2} , \quad \phi_{xx} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2} .$$

La famiglia di funzioni $\phi(x, t)$ costituisce dunque una soluzione generale per la (4.49), che può essere utilizzata per risolvere specifici problemi a valori

iniziali ed al contorno. Possiamo adesso interpretare il significato di funzioni che dipendono dagli argomenti $x - ct$ e $x + ct$ (si veda fig. 3.7).

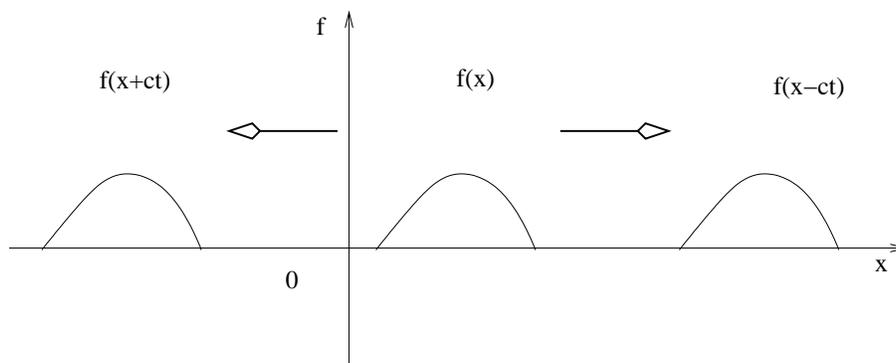


Figura 4.7

Se poniamo $y = x - ct$, vediamo facilmente che $f(y)$ ha lo stesso grafico di $f(x)$ (la legge funzionale è la stessa!), ma l'origine del riferimento è spostato da $x = 0$ ad $x = ct$. Riportato sullo stesso riferimento cartesiano il risultato è quello di vedere la $f(x)$ traslata nel senso positivo dell'asse x di un tratto ct . Ecco quindi una funzione che si comporta come un'onda che si muove con velocità c . Discorso analogo, ma rovesciato, per la funzione di argomento $x + ct$. La soluzione $\phi(x, t)$ può essere utilizzata per calcolare la soluzione della (4.49) per $x \in \mathbb{R}$, con dati iniziali assegnati

$$\phi(x, 0) = f(x) + g(x) = v(x), \quad \phi_t(x, 0) = -cf'(x) + cg'(x) = w(x). \quad (4.83)$$

La seconda uguaglianza può essere integrata rispetto alla x , ottenendo così

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x w(\xi) d\xi. \quad (4.84)$$

Sommando e sottraendo la prima delle (4.83) con la (4.84) si ottiene l'espressione delle incognite $f(x)$ e $g(x)$ in funzione dei dati iniziali:

$$f(x) = \frac{1}{2}v(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x w(\xi) d\xi, \quad g(x) = \frac{1}{2}v(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x w(\xi) d\xi. \quad (4.85)$$

Tornando dalla variabile x alle variabili evolute nel tempo $x - ct$ e $x + ct$, abbiamo

$$f(x-ct) = \frac{1}{2}v(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} w(\xi) d\xi, \quad g(x+ct) = \frac{1}{2}v(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} w(\xi) d\xi, \quad (4.86)$$

che, sommate, danno luogo alla così detta soluzione di d'Alembert ¹³:

$$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \frac{v(x - ct) + v(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} w(\xi) d\xi .$$

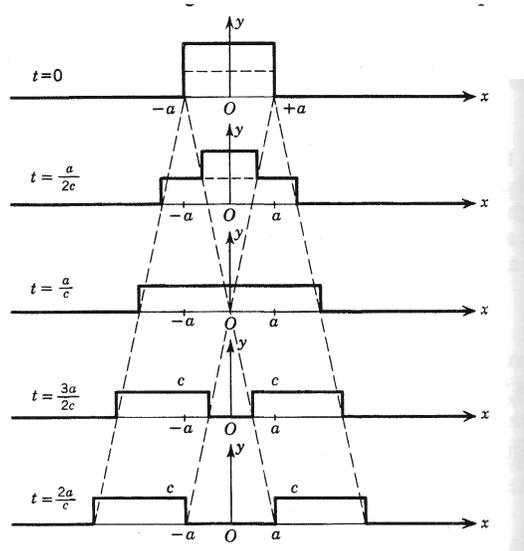


Figura 4.8

La soluzione può essere interpretata in modo particolarmente semplice nel caso in cui $w(x) \equiv 0$ (si veda la figura 3.8, dove si è presa $v(x) = 1, \forall |x| < 1$ e zero fuori dell'intervallo). La sua evoluzione è costituita infatti da un'onda progressiva ed una regressiva (entrambe con velocità c), il cui profilo è dato, per ciascuna di esse, dalla metà del dato iniziale della funzione.

¹³Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, enciclopedista, matematico, fisico, filosofo ed astronomo francese, tra i più importanti protagonisti dell'Illuminismo (Parigi, 16 novembre 1717 - Parigi, 29 ottobre 1783).

4.12 Esercizi

Esercizio 1.7.1

$$f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Soluzione: osserviamo che la funzione è pari nel suo intervallo di definizione e che $f(\pi) = f(-\pi)$ e $f'(\pi) \neq f'(-\pi)$. Essa può essere estesa periodicamente al di fuori dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come una funzione pari. Risulta:

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2x^2}{\pi n} \sin nx \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi} (-1)^n + \frac{4}{n^3\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n.$$

Quindi la serie di Fourier è:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Esercizio 1.7.2

$$\begin{cases} f(x) = e^x & x \in [0, 2\pi] \\ f(x) = f(x + 2\pi) \end{cases}$$

Soluzione: calcoliamo i coefficienti dalle definizioni:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx = \frac{e^x \cos nx}{\pi} \Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} + \frac{n}{\pi} e^x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx;$$

si ottiene quindi

$$= (1 + n^2) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$$

ed infine

$$a_n = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1+n^2)}.$$

con calcoli analoghi si ottiene

$$b_n = \frac{n(e^{2\pi}-1)}{\pi(1+n^2)}.$$

Esercizio 1.7.3

$$f(t) = t \quad t \in [0, 1]$$

Soluzione: Consideriamo l'estensione periodica dispari, dove, evidentemente, $T = 2$ e $\omega = \pi$. I coefficienti a_n sono tutti identicamente nulli. Per il calcolo di b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 t \sin n\pi t dt = -\frac{2}{n} t \cos n\pi t \Big|_0^1 + \frac{2}{n} \int_0^1 \cos n\pi t dt = \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier della funzione assegnata è quindi:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin n\pi t.$$

Esercizio 1.7.4

$$f(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Soluzione: la funzione è pari nell'intervallo di definizione e può essere prolungata periodicamente al di fuori di esso come una funzione periodica pari di periodo 2π . Il suo prolungamento soddisfa i criteri per la convergenza puntuale ed essendo una funzione continua la serie converge in

tutti i punti (compresi gli estremi dell'intervallo di definizione) al valore della $f(x)$. Poiché la funzione è pari tutti i coefficienti b_n sono nulli. Calcoliamo gli altri coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} [\cos nx - 1] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Quindi per n pari

$$a_n = 0$$

e per n dispari

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2}.$$

Ponendo quindi $n = 2k + 1$ la serie cercata si scrive nel modo seguente

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},$$

ovvero

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right].$$

Esercizio 1.7.5

$$f(x) = |\sin x| \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Soluzione: la funzione è pari nell'intervallo di definizione e può essere prolungata periodicamente al di fuori di esso. In questo modo risulta naturale scegliere il periodo 2π e la base delle funzioni armoniche è $\{\cos nx, \sin nx\}$. Naturalmente l'estensione periodica di $f(x)$ è la funzione $|\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, che è periodica di periodo π e che soddisfa tutte le condizioni per la convergenza puntuale $\forall x \in \mathbb{R}$. Si può quindi cercare lo sviluppo di $f(x)$ sul periodo π con la base $\{\cos 2nx, \sin 2nx\}$. I due sviluppi, ovviamente, coincidono.

Calcoliamo i coefficienti scegliendo 2π come periodo. Poiché l'estensione periodica è pari, tutti i coefficienti b_n sono identicamente nulli. Per gli altri avremo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(1+n)x dx + \int_0^{\pi} \sin(1-n)x dx \right],$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso delle formule di prostaferesi. Calcoliamo gli integrali in parentesi quadra nell'ultima riga:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(1+n)x dx = -\frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{1+n} \left[(-1)^{1+n} - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{1+n} \left[(-1)^n + 1 \right].$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(1-n)x dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ -\frac{1}{1-n} \cos(1-n)x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n-1} [(-1)^{n-1} - 1] = -\frac{1}{n-1} [(-1)^n + 1] & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

È facile vedere che per ogni n dispari i coefficienti a_n sono nulli, mentre per $n = 2k$ pari si ha

$$a_n = a_{2k} = -\frac{2}{\pi(4k^2 - 1)} [(-1)^{2k} - 1] = -\frac{4}{\pi(4k^2 - 1)} \quad \text{dove } k = 1, 2, 3, \dots$$

La serie cercata è quindi

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1},$$

ovvero

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots \right].$$

Esercizio 1.7.6 Sviluppare la seguente funzione in serie di seni:

$$f(x) = 1 \quad x \in [0, \pi]$$

Soluzione: se estendiamo in modo dispari la funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e la prolunghiamo periodicamente al di fuori di esso otteniamo una

funzione $\tilde{f}(x)$ sviluppabile in serie di Fourier, i cui coefficienti a_n sono tutti identicamente nulli, con $n = 0, 1, 2, \dots$. Calcoliamo i coefficienti b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

La serie di Fourier di $\tilde{f}(x)$, posto $n = 2k + 1$ è quindi:

$$\tilde{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Come si vede la serie converge ad $\tilde{f}(x)$ su \mathbb{R} tranne che nei punti $x = n\pi$ dove è identicamente nulla, come previsto dal teorema sulla convergenza puntuale. Per quanto riguarda la funzione di partenza $f(x)$ avremo quindi convergenza puntuale della serie nell'intervallo aperto $(0, \pi)$, ma non negli estremi.

Esercizio 1.7.7 Sviluppare la seguente funzione in serie di seni:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -3 < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

Soluzione: la funzione $f(x)$ è definita su un intervallo di lunghezza 6 e si può prolungare in modo da ottenere una funzione periodica di periodo $T = 6$. La base delle funzioni con cui costruire la serie è quindi $\{\cos n\omega x, \sin n\omega x\}$ con $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Calcoliamo i coefficienti della serie:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos n\omega x dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \cos n\omega x dx .$$

Si deduce subito

$$a_0 = \frac{2}{3} .$$

Per $n \neq 0$ si ha

$$a_n = \frac{1}{3} \frac{\sin n\omega x}{n\omega} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3n\omega} (\sin n\omega - \sin(-n\omega)) = \frac{2 \sin n\omega}{3 n\omega} = \frac{2}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{3} \right) .$$

Calcoliamo adesso i coefficienti b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin n\omega x dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \sin n\omega x dx = -\frac{1}{3n\omega} \cos n\omega x \Big|_{-1}^1 = \\
 &= -\frac{1}{3n\omega} (\cos n\omega - \cos(-n\omega)) = 0.
 \end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie cercato è quindi

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right),$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right) - \frac{1}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) + \dots \right].$$

Osserviamo che

$$\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } n = 3k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{per } n = 1, 2, 7, 8, \dots \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{per } n = 4, 5, 10, 11, \dots \end{cases}$$

Indice analitico

Equazioni differenziali ordinarie

- autonome, 2
- equazioni e sistemi di ordine n , 40
- equazioni e sistemi lineari di ordine n , 42
- fattori di integrazione, 9
- forma normale, 2
- I ordine a variabili separabili, 4
- I ordine del tipo di Bernoulli, 7
- I ordine del tipo omogeneo, 4
- I ordine esatte, 8
- I ordine lineari, 5
- II ordine lineari a coefficienti costanti, 27
- II ordine lineari a coefficienti costanti non omogenee, 30
- II ordine lineari a coefficienti costanti non omogenee: metodo dei coefficienti indeterminati, 31
- II ordine lineari a coefficienti costanti non omogenee: metodo di variazione delle costanti, 33
- lineari, 2
- matrice esponenziale, 45, 49
- matrice fondamentale di soluziomi, 48
- ordine dell'equazione, 2
- PVI per l'EDO lineare vettoriale non omogenea, 50
- soluzione generale, 3
- soluzione particolare, 3

- variabile dipendente, 1
- variabile indipendente, 1

Serie di Fourier

- basi ortonormali, 70
- convergenza puntuale, 81
- convergenza quadratica, 75
- convergenza uniforme, 88
- criteri di convergenza, 88
- energia di un segnale, 75
- funzioni periodiche, 77
- il fenomeno di Gibbs, 85
- il nucleo di Dirichlet, 102
- lo spazio L^2 , 69
- polinomi trigonometrici, 68
- serie complessa, 74
- serie dei coseni, 80
- serie dei seni, 80
- serie reale, 74
- Teorema di Dirichlet, 82

Spazi lineari

- base approssimante, 64
- base di uno spazio lineare, 59
- base ortonormale, 60
- definizione, 57
- disuguaglianza di Bessel, 62
- disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, 61
- disuguaglianza di Minkowski, 62
- norma, 58
- procedura di Gram-Schmidt, 60
- prodotto interno, 59
- spazi di Banach, 65
- spazi di Hilbert, 65
- spazi unitari, 60

Battimenti, 36

Combinazione lineare, 58

Determinante Wronskiano, 24

Equazione del calore o della
diffusione, 96

Equazione delle onde, 89

Indipendenza lineare, 25, 58

La soluzione di d'Alembert per
l'equazione delle onde, 106

Lemma di Riemann-Lebesgue, 63, 75

Modello logistico, 17

Modello Malthusiano, 16

Risonanza, 38

Teorema (o Identità) di Parseval, 63,
74

Teorema di Abel, 24

Teorema di Cauchy, 10, 23, 41

Indice

1	Equazioni differenziali ordinarie	1
1.1	Notazioni e definizioni	1
1.2	EDO del I ordine a variabili separabili	4
1.3	EDO del I ordine di tipo omogeneo	4
1.4	EDO del I ordine lineari	5
1.5	EDO del I ordine del tipo di Bernoulli	7
1.6	Equazioni esatte	8
1.7	Il problema ai valori iniziali	9
1.8	Modelli matematici	16
1.9	EDO del II ordine	19
1.10	EDO lineari del II ordine	21
1.11	EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti	27
1.12	EDO lineari del II ordine non omogenee	30
1.13	Forma vettoriale dell'EDO del II ordine	40
1.14	EDO e sistemi di EDO di ordine n	41
1.15	EDO e sistemi lineari di EDO	43
1.16	Matrice fondamentale di soluzioni	49
2	Equazioni non lineari	53
2.1	Il pendolo non lineare	53
3	Abbecedario degli spazi lineari	57
3.1	Introduzione	57
3.2	Definizioni	57
4	Serie di Fourier	67
4.1	Introduzione	67
4.2	Polinomi trigonometrici	68
4.3	Lo spazio di Hilbert L^2 e la convergenza quadratica	69
4.4	Serie di Fourier di funzioni periodiche	76
4.5	Convergenza puntuale della serie di Fourier	81
4.6	Il fenomeno di Gibbs	85

4.7	Convergenza uniforme ed altri risultati di convergenza	87
4.8	Applicazioni alle Equazioni Differenziali a Derivate Parziali . . .	89
4.9	Appendice 1	100
4.10	Appendice 2	102
4.11	Appendice 3	104
4.12	Esercizi	107