ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM) A.A. 2009-2010

8 e 10 marzo 2010

March 10, 2010

1 Trasformata di Fourier: il caso razionale

Nel caso in cui f sia una funzione razionale, la sua trasformata di Fourier puo' calcolarsi utilizzando il metodo visto la scorsa settimana a lezione. In definitiva, si tratta di applicare il seguente risultato.

Teorema 1 (trasformata) - *Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni (**??**). Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di D, si ha:*

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i > 0} \mathrm{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ \\ -2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i < 0} \mathrm{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema 2 (antitrasformata) - *Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{array}{l} i)\ \mathrm{gr}\ P < \mathrm{gr}\ Q \\ ii)\ Q(\omega) \neq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di Q, l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j\sum_{\mathrm{Im}\ s_i<0} \mathrm{Res}\left[F(s)e^{jst}, s_i\right] & \text{per } t<0 \\ \\ j\sum_{\mathrm{Im}\ s_i>0} \mathrm{Res}\left[F(s)e^{jst}, s_i\right] & \text{per } t>0 \end{cases}.$$

Esercizio:
Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2+4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto la lezione scorsa si ha per $t > 0$

$$f(t) = j\ \mathrm{Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{-2t} \text{ se } t>0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{2t} \text{ se } t<0.$$

2 Altre proprietà della trasformata di Fourier

1. **Linearità** - *Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{c_1f_1 + c_2f_2\right\} = c_1\mathfrak{F}\left\{f_1\right\} + c_2\mathfrak{F}\left\{f_2\right\}, \qquad c_i \in \mathbb{C}.$$

2. **Traslazione in frequenza -** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.Allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)e^{j\gamma t}\right\} = F(\omega-\gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

3. **Traslazione temporale** - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t-A)\right\} = e^{-jA\omega}F(\omega), \qquad A \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO

Calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2+1} e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t+8)^2+1};$$
$$h_2(t) = \frac{1}{(t+8)^2+1} e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezioni scorse)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t+8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applcando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega-4)}.$$

3 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientementi "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{gathered} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{1}$$

E' evidente che se $f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > x_0$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

per le funzioni

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = e^{5t}u(t), & f_2(t) = tu(t), & f_3(t) = \sin t \; u(t), \\ f_4(t) = e^{-9t}u(t), & f_5(t) = u(t), & f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{array}$$

si ha

$$\begin{array}{l} \alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \\ \alpha_{f_4} = -9, \; \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty. \end{array}$$

Ciò premesso, si ha la seguente

Definizione. *Sia* $f \in \Lambda^1$ *e sia* α_f *la sua ascissa di convergenza . Si chiama trasformata di Laplace di* f, *e si indica con* $L[f]$, *la trasformata di Fourier di* $f(t)e^{-xt}$, *dove* $x > \alpha_f$, *ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}. \tag{2}$$

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier si ottiene facilmente

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\mathrm{Re}\, s = x(> \alpha_f)$.

Per complementi sulla trasformata di Laplace, e per la sua definizione, si veda anche Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999.

3.2 Formula di Bromwich-Mellin

Vale la seguente:

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia* $f \in \Lambda^1$. *Sia inoltre* f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$. *Indicata con* $F(s) = L[f(t)]$ *la sua trasformata di Laplace, si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3}$$

dove $x = \mathrm{Re}\, s > \alpha_f$

La formula (3), nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (2). L'ipotesi "*f sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$" serve per poter applicare tale formula di inversione e puo' essere omessa se $f(t)e^{-xt} \in L^2[0, \infty)$ (vedi Teorema di Plancherel).

Utilizzando il Lemma di Jordan, in una forma leggermente più generale di quella vista nelle scorse lezioni, è possibile mostrare che il secondo membro in (3) è indipendente dalla scelta di x, purché sia $x > \alpha_f$.

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente risultato, la cui seconda parte sarà provata in seguito:

Teorema 3 *Sia* F *razionale,* $F(s) = N(s)/D(s)$.

- *Se gr $D >$ gr N allora esiste $f \in \Lambda^1$ tale che $F(s) = L[f(t)]$.*
- *Se gr $D \leq$ gr N. allora F è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema 4 *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro con gr $N <$gr D. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.3 Proprietà della trasformata di Laplace

Riportiamo qui le principali proprietà della trasformata di Laplace, che intervengono nella risolubilita' di equazioni differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti

- **Linearità**

  Siano $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ e siano c_1, c_2 due costanti (reali o complesse). Allora:

  $$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

- **Derivazione**

  Sia $f \in C^1[0, \infty)$ e sia $f, f' \in \Lambda^1$. Allora

  $$L[f\,'] = sL[f] - f(0+),$$

  dove $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$.

Sia $f \in C^2[0,\infty)$ e sia $f, f', f'' \in \Lambda^1$. Allora

$$L[f^{''}] = s^2 L[f] - s\ f(0+) - f^{'}(0+),$$

dove $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ e $f^{'}(0+) = \lim_{t\to 0+} f^{'}(t)$.

- **Integrazione**

  Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1$. Allora

  $$L[\int_0^t f(r)dr] = \frac{L[f]}{s}.$$

- **Convoluzione**

  Sia $f, g \in \Lambda^1$. Allora

  $$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$

  In altre parole, sia $f, g \in \Lambda^1$; posto $L[f] = F(s)$, $L[g] = G(s)$ si ha

  $$f * g = L^{-1}(F(s)\ G(s)),$$

  dove il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.9, 1.10, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.4 Equazioni differenziali lineari e trasformata di Laplace

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{4}$$

dove $g \in \Lambda^1$. Vogliamo trovare la soluzione y di (4) che verifica le condizioni

iniziali

$$y(0) = A, , y'(0) = B.$$

Poichè tutte le soluzioni di (4) sono (per $t \geq 0$) funzioni di classe Λ^1, è possibile utilizzare il metodo della trasformata di Laplace. Applicando la trasformata di Laplace all'equazione (4) ed usando la linearità si ottiene

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[g].$$

Usando poi il Teorema di derivazione si ha:

$$s^2 L[y] - As - B + a(sL[y] - A) + bL[y] = L[g]$$

ossia

$$L[y] = \underbrace{\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}}_{(\#)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + as + b}}_{(*)} L[g]$$

Le funzioni (#) e (*) sono funzioni razionali proprie ed allora è possibile calcolare la loro antitrasformata utilizzando il Teorema 4. Sia perciò

$$f(t) = L^{-1}(\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b})$$
$$h(t) = L^{-1}(\frac{1}{s^2 + as + b})$$

dove, al solito, il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace. Applicando la proprietà di convoluzione si ottiene per $t \geq 0$

$$y(t) = f(t) + (h * g)(t).$$

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.