ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2009-2010
Tracce delle lezioni del 15 e 17 marzo 2010

March 18, 2010

1 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: l'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo $I = (\overline{x}, +\infty)$ dell'asse reale (non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$). Allora:

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (1) tale che $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.*

2. *Ogni soluzione di (1) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I.*

3. *L'insieme delle soluzioni di (1) è uno spazio lineare di dimensione* 2 .

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (*1*) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come si è visto nella lezione scorsa, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (*1*) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Scrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{2}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (2) è di tipo (*1*) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{3}$$

dove n è un parametro reale. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione). Tale equazione che sarà esaminata in seguito.

Si supponga ora che le funzioni a, b siano continue a tratti in $I = (\overline{x}, +\infty)$.

Definizione - Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (1) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (1) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni nonbanali di (1) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon Sia A una primitiva di a,ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (1) è oscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)}dx = \int^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx = \infty.$$

(ii) L'equazione (1) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)}dx < +\infty, \qquad 0 \leq \int^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx. < +\infty$$

(iii) L'equazione (1) è nonoscillante se

$$b(x) \leq 0 \qquad \textit{per ogni } x \textit{ sufficientemente grande.}$$

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{4}$$

(4) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4}y = 0$$

e l'equazione di Bessel sopra introdotta

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4} y = 0.$$

2 L'equazione di Bessel (n intero positivo)

Come detto, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{5}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti e smorzate, i.e. $\lim_{x \to +\infty} J_n(x) = 0$.

3 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);
3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;
4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;

   ....

5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in (5) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ *sono noti, non appena siano noti i valori che* Γ *assume in* $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, ...$ Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si puo' usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si puo' procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \qquad \text{se } x \in (-2, -1)$$
$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\Gamma(x+3) \qquad \text{se } x \in (-3, -4)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2,$ ..... si ha

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{6}$$

con $n = 0, 1, 2, ...$

4 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{7}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (7) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (7) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \tag{8}$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (8) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema
(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$ le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.

(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \tag{9}$$

dove c_1,c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (9)

$$c_1 = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n}, \qquad c_2 = \frac{-1}{\sin\ \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

In questo paragrafo vengono brevemente presentati alcuni richiami sul calcolo delle radici nel campo complesso, gia' visti nei corsi di base.

5 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n-esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \ldots n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n-esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{10}$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \mathrm{Arg(s_0)}$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente** n.
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- Tali radici **sono i vertici di un poligono regolare di** n **lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n-esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

Ad esempio, per $n = 2$, le radici di $\sqrt[2]{s_0}$ sono due e sono date da

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] \\
s_2 &= \sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

A titolo di esempio si calcoli

$$\sqrt[2]{1 + j\sqrt{3}}.$$

In questo caso si ha $s_0 = 1 + j\sqrt{3}$ e quindi $\rho_0 = |s_0| = 2$ e $Arg\ s_0 = \theta_0 = \pi/3$. Pertanto le due radici sono date da

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \\
s_2 &= -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Esercizi: Calcolare tutti i valori delle seguenti radici nel campo complesso:

$$
\begin{gathered}
\sqrt[3]{j};\ \sqrt[4]{-1};\ \sqrt[2]{1-j};\ \sqrt[2]{5+5j};\ \sqrt[2]{5-5j}; \\
\sqrt[3]{2-2j};\ \sqrt[4]{3+3j},\ \sqrt[3]{-125},\ \sqrt[2]{-64},\ \sqrt[4]{-81}.
\end{gathered}
$$