ANALISI MATEMATICA III ELM+TEM A.A. 2009-2010
Traccia della lezione del 29 marzo 2010

April 10, 2010

1 Le distribuzioni

1.1 Richiami

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}\,;$$

come si è visto nella lezione scorsa, lo spazio delle distribuzioni risulta essere un'estensione di L^1_{loc}.

Ricordiamo ora i principali risultati già visti..

Una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *funzione test* se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed è a supporto compatto. Si chiama poi *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}\,.$$

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione test):

1. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt$, dove f è un'assegnata funzione in L^1_{loc}.

2. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

3. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_f(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle .$$

Pertanto

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle f(t), \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* f *e* φ.

In analogia, le distribuzioni sopra definite negli Esempi 2. e 3. si indicano anche con i simboli

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

Lo spazio $\mathfrak{D}$ è una effettiva estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

in quanto, come provato a lezione, esistono distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia distribuzioni T il cui crochet non puo' essere espresso nella forma (1) tramite un'opportuna $f \in L^1_{loc}$.

Pertanto

$$L^1_{loc} \underset{\neq}{\subseteq} \mathfrak{D}.$$

1.2 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che non "provengono" da funzioni di L^1_{loc}, è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni* $\{T_n\}$ *converge in* $\mathfrak{D}$ *ad una distribuzione* T *se la successione numerica* $\{T_n(\varphi)\}$ *converge a* $T(\varphi)$ *per ogni* $\varphi \in D$; ossia

$$\{T_n\} \overrightarrow{\mathfrak{D}}\ T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \overset{\mathbb{R}}{\to} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{(*)}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo (*) significa che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$. Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in* $\mathfrak{D}$*) di una successione di elementi di* L^1_{loc}*, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc}, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T.

Ad esempio, nel corso della lezione si è provato che la distribuzione $\delta(t)$ è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la successione $\{k_n(t)\}$ converge, **nel senso delle distribuzioni,** alla distribuzione $\delta(t)$, i.e.:

$$\delta(t) \overset{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove $(*)$ significa, come appena detto, che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$.