ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2009-2010
Tracce delle lezioni del 12 e 14 aprile 2010

April 15, 2010

1 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza:*

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$
$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$
$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$
$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x).$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

2 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f\,' \in L^1_{loc}$ e quindi $f\,'$ può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f\,'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\,'(t)\ \varphi(t)\ dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f\,'(t)\ \varphi(t)\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi'(t)\ dt = -\left\langle f(t), \varphi'(t) \right\rangle;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f\,'(t), \varphi(t) \rangle = -\left\langle f(t), \varphi'(t) \right\rangle.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\left\langle T, \varphi'(t) \right\rangle,\ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f\,' \equiv Df$
- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

  si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a)$.
- **Teorema -** *Se* $f \in C^1(\mathbb{R}/\left\{t_0\right\})$ *e* $f\,' \in L^1_{loc}$, *allora*

$$f(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f\,'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha

$$Df = f\,'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0),\ \ \forall\varphi \in D$$
$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0),\ \ \forall\varphi \in D$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0),\ \ \forall\varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a)$.

3 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall\varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2+4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) &= \delta(t-\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3+5t)\delta'(t-1)] &= -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1) \\ (t-1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t-2) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.

4 Distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j,k = 0,1,2,.... \right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t. Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$appartiene a S.

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\} \,,$$

si ha

$$D \subsetneq S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \subsetneq S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate.*

E' possibile provare che lo spazio delle distribuzioni temperate è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$. Nella prossima lezione vedremo alcuni esempi di distribuzioni temperate e vedremo come sia possibile definire in $\Im$ il concetto di trasformata di Fourier.