ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM A.A. 2009-2010
Tracce delle lezioni del 19 e 21 aprile 2010

April 21, 2010

1 Distribuzioni temperate

Ricordiamo che si chiama *spazio delle distribuzioni temperate* lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S, dove

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j, k = 0, 1, 2, ... \right\}.$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}.$$

E' possibile provare che le funzioni

$$e^t,\ e^{-t},\ \sinh t,\ \cosh t.\ e^t u(t),\ e^{-t} u(-t),$$

pur essendo funzioni in L^1_{loc}, e quindi distribuzioni, ossia elementi di $\mathfrak{D}$, **non** sono distribuzioni temperate. Pertanto lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio proprio dello spazio delle distribuzioni, ossia

$$\Im \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}.$$

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);

2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists\ M, q \geq 0$: $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;

3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;

4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;

5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Si osservi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega,\ \forall\varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi\rangle = \langle f, \Phi\rangle\ ,\ \forall\varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle\ ,\ \forall\varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi\rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per gli elementi che **non** appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$)

funzione	$\rightarrow$	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}		$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\{\delta(t)\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\{\delta(t-a)\} = e^{-ja\omega}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \Im \Longrightarrow \mathcal{F}_D\{DT\} = j\omega\mathcal{F}_D\{T\}.$$

ESERCIZIO: Calcolare la Trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$T_1 = \sin(t+1)\delta(t); \ T_2 = t\delta'(t-1); \ T_3 = D(e^{t-3}\delta(t));$$
$$T_4 = D(e^t\delta(t-3)); \ T_5 = e^{t-3}\delta'(t); T_6 = e^{5t}\delta'(t-1) + \delta'(t-2).$$

3 Trasformata di Laplace di distribuzioni

NOTA: Questa parte è facoltativa per gli studenti dell'anno accademico precedente, che hanno inserito a suo tempo nel loro piano di studi il corso di Analisi Matematica III

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora T si dice *nulla in un intervallo* (a, b) se

$$< T, \varphi(t) >= 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto in (a, b).

Definizione 2 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo di* T, e si indica con N_T, l'unione di tutti gli intervalli aperti (a, b) in cui T è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto di* T.

Poiché N_T è unione (infinita) di aperti, N_T è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di T, essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

   Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

   e. di conseguenza, il supporto di f è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[0, +\infty)$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione δ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di δ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t-a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione tale che:
1) il supporto di T è contenuto in $[0, +\infty)$;
2) esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$Te^{-\beta t} \quad \text{è una distribuzione temperata.} \tag{1}$$

Sia α_T l'estremo inferiore delle costanti β soddisfacenti (1). Si chiama *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni) di* T, e si indica con $L_D[T]$, il crochet

$$L_D[T] = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}\right\rangle \tag{2}$$

dove $\operatorname{Re} s > \beta > \alpha_T$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{aligned} &\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ &\lambda(t) = 1 \qquad \text{se } t \geq \varepsilon \qquad (\varepsilon < 0) \\ &\lambda(t) = 0 \qquad \text{se } t \leq \sigma, \qquad (\sigma < \varepsilon < 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Si puo' provare che il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di β. Il crochet (2) dipende invece dal numero complesso s ed è quindi una funzione complessa $F(s)$, ossia

$$L_D[T] = F(s) = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}\right\rangle.$$

. Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione T è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida, ossia un elemento di S.

3.1 Relazione con la trasformata "classica"

Ricordiamo quanto visto nelle passate lezioni per la trasformata di Laplace "in senso classico".

Sia $f \in \Lambda^1$, ossia tale che:

$$\begin{gathered} 1) \qquad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{4}$$

e sia α_f la sua ascissa di convergenza, i.e.

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Allora per ogni $x > \alpha_f$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, coincide con la trasformata di Laplace $L[f]$ di f, ossia

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{ f(t)e^{-xt} \right\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \tag{5}$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x (> \alpha_f)$.

Ciò premesso, vale la seguente

Proprietà. Se f soddisfa (4), allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ^1.

3.2 Esempi

Un semplice calcolo prova che:

$$\begin{gathered} L_D[\delta(t)] = 1 \\ L_D[\delta'(t)] = s \\ \dots\dots\dots \\ L_D[\delta^{(n)}(t)] = s^n. \end{gathered}$$

Inoltre

$$L_D[\delta(t-a)] = e^{-sa},\ a > 0.$$

3.3 Funzioni razionali

Il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

Teorema *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado $N <$ grado D, F è la trasformata di Laplace una funzione di classe Λ^1; altrimenti, se grado $N \geq$ grado D, F è la trasformata di Laplace di di una distribuzione.

Ad esempio la funzione

$$F_1(s) = \frac{s^3+8}{s^3+3s^2+1}$$

è la trasformata di una distribuzione, mentre

$$F_2(s) = \frac{s^2+8}{s^3+3s^2+1}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ^1.

3.4 Derivazione

Vale il seguente:

Teorema *Sia $g \in C^1(0,+\infty), g, g' \in \Lambda^1$. Allora si ha:*

(derivazione "in senso classico")

$$L[g'] = sL[g] - g(0+)\ .$$

(derivazione "nel senso delle distribuzioni")

$$L_D[Dg] = sL[g].$$