

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2010-2011

Tracce delle lezioni del 12 e 13 ottobre 2010

October 13, 2010

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j , detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ sono chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario*.

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di z* , e si indica con $\bar{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A , il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\overline{z \pm s} &= \bar{z} \pm \bar{s} \\ \overline{zs} &= \bar{z} \bar{s} \\ \overline{\left(\frac{z}{s}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{s}} \quad \text{se } s \neq 0.\end{aligned}$$

Si chiama poi *modulo di z* , e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$:

$$\begin{aligned}z \bar{z} &= |z|^2 \\ \operatorname{Re} z &= (z + \bar{z})/2 \\ \operatorname{Im} z &= (z - \bar{z})/2j.\end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned}z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \quad (\text{se } s \neq 0).\end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi e sarà provata successivamente.

1.3 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di z* , e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z , risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta).$$

Le formule di passaggio sono:

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \theta \\ b &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del loro prodotto e del loro rapporto. Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica, $s_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$, $s_2 \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{s_1}{s_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$(\sqrt{3} + j)^6 = -64.$$

Se interpretiamo i numeri complessi come vettori piani, allora la somma o la differenza tra due numeri complessi s, z . ha, rispettivamente, il significato tradizionale di somma o differenza tra vettori. Il prodotto di un numero complesso z per un numero complesso assegnato s_0 , con $z \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, può essere interpretato come una rotazione del vettore z accompagnata da una omotetia (dilatazione se $|s_0| > 1$, contrazione se $|s_0| < 1$). Ad esempio jz è il vettore che si ottiene ruotando in senso antiorario di $\pi/2$ il vettore z .

2 Distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = |z - s|.$$

Esercizio. Verificare la relazione

$$|z + s|^2 + |z - s|^2 = 2(|z|^2 + |s|^2).$$

Tale relazione è nota come "Identità del parallelogrammo" in quanto esprime la ben nota proprietà della geometria euclidea che in un parallelogrammo la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ .

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1$$

rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

3 Il concetto di infinito in $\mathbb{C}$

Nel seguito consideremo l'insieme $\mathbb{C}$ ampliato con l'aggiunta di $\{\infty\}$ (*punto all'infinito*) e chiameremo *intorno di ∞* di raggio R , l'esterno della circonferenza di centro l'origine e raggio R . Tale definizione è giustificata dal fatto che l'insieme dei numeri complessi, ampliato con $\{\infty\}$, può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della superficie di una sfera mediante la nota "proiezione stereografica". Il punto $\{\infty\}$ corrisponde, sulla superficie sferica, al polo e l'intorno di ∞ ad una calotta polare.

Diremo poi che una successione $\{s_n\}$ converge a ∞ se

$$\lim_n |s_n| = +\infty.$$

Anche tale definizione può essere giustificata rappresentando $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sulla superficie di una sfera mediante la proiezione stereografica.

4 Funzioni complesse

4.1 Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione può essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di f* e *parte immaginaria di f* .

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

La funzione f prende nome di "inversione per raggi reciproci" e gode della seguente proprietà: f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned}f_1(s) &= 7js + s^2 \\f_2(s) &= s + |s|^2 \\f_3(s) &= \frac{\bar{s}}{s - 4} \\f_4(s) &= \frac{3}{s - |s|}.\end{aligned}$$

4.2 Limiti e continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|\dots|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = L, \quad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$.

E' facile provare che

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = L, \quad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in* s_0 se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma,

differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poichè $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

4.3 Successioni e serie

Anche per le successioni, la nozione di convergenza è quella usuale. Precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \quad (1)$$

o, equivalentemente,

$$s_n \rightarrow s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$. E' facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} s_0, \quad \lim_n \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s_0.$$

Poichè $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : |s_n - s_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_N\}$ delle somme parziali, dove

$$S_N = \sum_{i=0}^N s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato "Se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ è convergente (in $\mathbb{R}$), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ è convergente in $\mathbb{C}$ ".

4.4 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^i}{i!} + \dots$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:
2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:
3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, $e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale*: $s = \rho e^{j\theta}$
5. $|e^s| = e^{\text{Re } s}$, $\text{Arg}(e^s) = \text{Im}(s)$, $\text{Re } e^s = e^{\text{Re } s} \cos \text{Im } s$, $\text{Im } e^s = e^{\text{Re } s} \sin \text{Im } s$
6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$
7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

5 Derivabilità e analiticità

5.1 Definizioni

DEF. n. 1 Una funzione f , definita in un intorno di un punto s_0 , si dice *derivabile in s_0* se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

e tale limite si indica con il simbolo $f'(s_0)$.

Esempi: per le funzioni

$$f(s) = 1, g(s) = s, h(s) = s^2$$

si ha rispettivamente

$$f'(s) = 0, g'(s) = 1, h'(s) = 2s.$$

In generale, è possibile provare che, se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$f(s) = s^n \implies f'(s) = ns^{n-1}.$$

Le funzioni $f(s) = \bar{s}, g(s) = |s|$ non sono derivabili in $s_0 = 0$.

DEF. n. 2 Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f si dice *analitica in Ω* [e si scrive $f \in C^1(\Omega)$] se f è derivabile in tutto l'insieme Ω ed ha derivata continua.

5.2 Teorema di Cauchy-Riemann

Vale il seguente importante risultato:

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia Ω un insieme **aperto** del piano complesso. Una funzione f è analitica in Ω **se e solo se** le funzioni $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ sono derivabili parzialmente rispetto a x e y [dove, al solito, $s = x + jy$] con derivate continue e verificano in tutto Ω le relazioni*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \tag{2}$$

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Inoltre si ha

$$f'(s) = u_x(x, y) + jv_x(x, y). \tag{3}$$

Le formule (2) prendono nome di *formule di Cauchy-Riemann*.

La formula (3) fornisce l'espressione della derivata di una funzione analitica. Da essa, tenendo conto di (2), è possibile ottenere altre equivalenti espressioni per la derivata. Ad esempio si ha

$$f'(s) = v_y(x, y) - ju_y(x, y).$$

Esercizi. i) provare che le funzioni $f(s) = \bar{s}$, $g(s) = |s|$ non sono analitiche in $\mathbb{C}$;
 ii) provare che $g(s) = s^2 + js$ è analitica in $\mathbb{C}$ e $g'(s) = 2s + j$;
 iii) provare che $h(s) = e^s$ è analitica in $\mathbb{C}$ e $h'(s) = e^s$.

5.3 Proprietà

Valgono le usuali regole di derivazione, viste nell'ambito dell'analisi reale:

$$\begin{aligned} (f(s) \pm g(s))' &= f'(s) \pm g'(s) \\ (f(s) g(s))' &= f'(s)g(s) + f(s)g'(s) \\ \left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)' &= \frac{f'(s)g(s) - f(s)g'(s)}{g^2(s)} \\ \frac{d}{ds}f(g(s)) &= \frac{df}{dg} \frac{dg}{ds}. \end{aligned}$$

6 Analiticità e funzioni armoniche

Anticipiamo il seguente risultato, che sarà visto in seguito.

Teorema Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Allora f è analitica in Ω [ossia $f \in C^1(\Omega)$] se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$.

Chiaramente, un equivalente Teorema non vale nell'ambito delle funzioni reali di variabile reale.

Definizione Una funzione $h : R^2 \rightarrow R, h = h(x, y)$ si dice armonica in un aperto Ω se in tale aperto h soddisfa l'equazione

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \quad (4)$$

Teorema Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0 . Allora le funzioni

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano l'equazione

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Viceversa sia $u = u(x, y)$ [$v = v(x, y)$] una funzione armonica in un intorno I di (x_0, y_0) . Allora esiste una funzione analitica f , individuata a meno di una costante reale, tale che $\operatorname{Re} f = u$ [$\operatorname{Im} f = v$].

Corollario Una funzione $u = u(x, y)$, definita in un intorno I di un punto (x_0, y_0) è parte reale di una funzione analitica in I se e solo se u è armonica in tale intorno, ossia soddisfa l'equazione (4) in I . Analogamente una funzione $v = v(x, y)$, definita in I è parte immaginaria di una funzione analitica in I se e solo se v è armonica in I , ossia soddisfa l'equazione (4) in I .

Esempi. La funzione $u(x, y) = 2xy + y$ è parte reale di una funzione analitica. La funzione $v(x, y) = x^2 + 4xy$ non è parte immaginaria di una funzione analitica. Analogamente, la funzione $u(x, y) = 2x - 7y^2$ non è parte reale di una funzione analitica.

7 Ricostruzione di una funzione analitica f , assegnata la parte reale $u = \operatorname{Re} f$ oppure la parte immaginaria $v = \operatorname{Im} f$.

Utilizzando i risultati precedenti e le formule di Cauchy-Riemann, è possibile determinare tutte le funzioni analitiche aventi una parte reale (o immaginaria) assegnata e armonica.

Procediamo con un esempio. La funzione $u(x, y) = 6xy - x - 2$, come è immediato verificare, è armonica. Troviamo dunque le funzioni f tali che $\operatorname{Re} f = u$.

Si ha

$$u_x(x, y) = 6y - 1, \quad u_y(x, y) = 6x$$

Tenendo conto delle formule di Cauchy-Rieman si ottiene

$$\begin{aligned}v_y(x, y) &= 6y - 1 \\v_x(x, y) &= -6x\end{aligned}$$

Integrando la prima equazione rispetto a y e la seconda rispetto a x si ha rispettivamente

$$\begin{aligned}v(x, y) &= 3y^2 - y + c(x) \\v(x, y) &= -3x^2 + d(y)\end{aligned}$$

dove $c = c(x)$ è una funzione della **sola** x e $d = d(y)$ è una funzione della **sola** y . Allora

$$3y^2 - y + c(x) = -3x^2 + d(y)$$

ossia

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x)$$

Poichè il primo membro dipende solo da y e il secondo soltanto da x , necessariamente entrambi devono essere costanti, ossia esiste una costante reale k tale che

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x) = k.$$

Ne segue $c(x) = -3x^2 + k$ e quindi $v(x, y) = 3y^2 - y + -3x^2 + k$. In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned}f(s) &= f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) = \\&= [6xy - x - 2] + j[3y^2 - y + -3x^2 + k]\end{aligned}\tag{5}$$

Per determinare l'espressione di f in funzione della variabile s si può usare il seguente:

Teorema di Weierstrass (dell'unicità dell'estensione analitica)

Sia $\hat{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora esiste al più una estensione di $\hat{h}$ al piano complesso che risulti analitica, i.e. esiste al più una funzione $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e tale che $h(x) = \hat{h}(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Il teorema di Weierstrass è un risultato di "unicità" e sinteticamente è chiamato "Teorema dell'unicità dell'estensione analitica".

Il (semplice) procedimento è il seguente. Da (5) si ha

$$\widehat{h}(x) = f(x + j0) = -x - 2 - 3x^2j + kj. \quad (6)$$

Si consideri poi l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione $\widehat{h}$, ossia si consideri la funzione h ottenuta da (6) sostituendo x con s :

$$h(s) = -s - 2 - 3s^2j + kj. \quad (7)$$

Le funzioni (5) e (7) sono due estensioni **analitiche** della stessa funzione $\widehat{h}$. Allora, per il Teorema di unicità di Weierstrass, tali funzioni devono necessariamente coincidere, e quindi

$$f(s) = -s - 2 - 3s^2j + kj.$$

8 Esercizi

- I teoremi di Rolle e di Lagrange non sono estendibili al piano complesso. Si giustifichi tale affermazione con un esempio (suggerimento: utilizzare la funzione $F(s) = e^s$).
- Sia f una funzione analitica in $\mathbb{C}$ tale che $\text{Im } f = 0$. Provare che f è una funzione costante.
- Determinare le funzioni analitiche tali che $u(x, y) = 3(x^2 - y^2)$ [Risposta $f(s) = 3s^2 + jk$].
- Determinare la funzione analitica f tale che $\text{Re } f = x + 10xy$, $f(0) = 0$.