APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2010-2011

Tracce delle lezioni del 19 e 20 ottobre 2010

October 20, 2010

1 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua in $[a, b]$ e le due derivate x' , y' non si annullano contemporaneamente in $[a, b]$.

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate x' e y' si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempi. (i) La curva

$$\gamma(t) = \cos t + j \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro l'origine, raggio 1 e percorsa in senso antiorario (il senso delle "t crescenti"). Ricordando le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}, \tag{1}$$

tale curva si puo' esprimere anche nella forma

$$\gamma(t) = e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

(ii) La curva

$$\gamma(t) = 6 + 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro 6, raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

(iii) La curva

$$\gamma(t) = 1 + j + 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $1 + j$, raggio 2 e percorsa in senso antiorario.

(iv) La curva

$$\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi]$$

rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 2, giacente nel 1^o e 2^o quadrante e percorsa in senso antiorario.

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

2 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))y'(t)dt.$$

Esempi: Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} |s| ds \text{ dove } \gamma_1(t) = 4e^{jt}, t \in [0, \pi];$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} |s| ds \text{ dove } \gamma_2(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi];$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} \overline{s} ds \text{ dove } \gamma_3(t) = e^{jt}, t \in [0, \pi/2];$$
$$I_4 = \int_{\gamma_4} s ds \text{ dove } \gamma_4(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi/2].$$

Si ha $I_1 = -32, I_2 = 0, I_3 = \pi j/2, I_4 = -4$.

"**Esercizio**" Si ha

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j,$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, i.e. C è una circonferenza di centro s_0, raggio r e percorsa (**una sola volta**) in senso antiorario (positivo).

3 Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_\gamma f_1(s) ds + c_2 \int_\gamma f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s) ds = -\int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1 + \gamma 2} f(s) ds = \int_{\gamma 1} f(s) ds + \int_{\gamma 2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_\gamma f(s) ds \right| \leq L_\gamma \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

dove L_γ indica la lunghezza della curva γ.

4 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino.**

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio (visto in precedenza)

$$\int_C \frac{1}{s-s_0}ds = 2\pi j. \tag{2}$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Teorema 2 (di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con γ_1 contenente γ_2 [vedi figura 1]. Sia s_0 un punto interno a γ_2 e sia f analitica all'interno di γ_1 eccetto il punto s_0. Sia poi f continua su γ_1. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (2), si ha allora

$$\int_\gamma \frac{1}{s-s_0}ds = 2\pi j$$

dove γ è una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa **contenente al proprio interno** il punto s_0.

Teorema 3 (di Cauchy) *Siano Γ, γ_1 e γ_2 tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in*

figura 2. Siano s_1 e s_2 due punti interni rispettivamente a γ_1 e γ_2 e sia f analitica all'interno di Γ eccetto i punti s_1 e s_2. Sia poi f continua su Γ. Allora

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

5 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni trigonometriche seno e coseno in $\mathbb{C}$ come estensione al campo complesso delle formule di Eulero nel modo seguente:

$$\sin s =_{\text{def}} \frac{e^{js} - e^{-js}}{2j}, \qquad \cos s =_{\text{def}} \frac{e^{js} + e^{-js}}{2}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Le principali proprietà di tali funzioni sono le seguenti.

1. Le funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ sono le estensioni al campo complesso delle corrispondenti funzioni reali;

2. Le *formule trigonometriche* note in campo reale e che non coinvolgono disuguaglianze, continuano a valere in $\mathbb{C}$. Ad esempio sono valide (e la verifica è immediata) l'identità fondamentale

   $$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

   le formule di somma, di sottrazione, di duplicazione, ecc... .

3. Le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π.

4. La funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:

   $$\sin(-s) = -\sin s, \qquad \cos(-s) = \cos s.$$

5. Valgono le relazioni

   $$\begin{aligned} \sin s &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \\ \cos s &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y, \end{aligned}$$

   da cui segue

   $$\begin{aligned} &\text{Re} \;\; \sin s = \sin x \cosh y, \qquad \text{Im} \;\; \sin s = \cos x \sinh y \\ &\text{Re} \;\; \cos s = \cos x \cosh y, \qquad \text{Im} \;\; \cos s = -\sin x \sinh y. \end{aligned} \tag{3}$$

6. Utilizzando (3) e le formule di Cauchy Riemann si ottiene facilmente che le funzioni seno e coseno sono *analitiche* in tutto $\mathbb{C}$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sin s = \cos s, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos s = -\sin s.$$

7. Valgono le relazioni

$$\overline{\sin s} = \sin \overline{s}, \qquad \overline{\cos s} = \cos \overline{s}.$$

8. Le funzioni seno e coseno *assumono tutti i valori complessi*. Dunque l'equazione $\sin s = \alpha$ ammette infinite soluzioni qualunque sia $\alpha \in \mathbb{C}$, e analogamente $\cos s = \alpha$. Di conseguenza **le funzioni seno e coseno NON sono limitate in** $\mathbb{C}$.

9. Se $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, l'equazione $\sin s = a$ ha come soluzioni *tutte e sole* le soluzioni (reali) di $\sin x = a$ in $\mathbb{R}$; analogo per il coseno. Quindi, in particolare scegliendo $a = 0$ si ha che **gli zeri delle funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri delle corrispondenti funzioni reali.**

6 Singolarità

Definizione 1 - *Un punto s_0 si dice **punto singolare per** f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in TUTTO I.*

Definizione 2 - *Sia s_0 un punto singolare per f. Allora s_0 si dice **punto singolare isolato** (o **singolarità isolata**) se esiste un intorno V di s_0 tale che f sia analitica in $V/\{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto V eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice **non isolato** (o **punto di accumulazione**).*

Esempi

$f_1(s) = \dfrac{s^2+1}{(s-2)(s-4)^3} \Rightarrow s = 2, s = 4$ sono sing. isolate.

$f_2(s) = \overline{s} \qquad \Longrightarrow$ ogni punto $s \in \mathbb{C}$ è una sing. non isolata

$f_3(s) = \dfrac{1-\cos s}{s^2} \Longrightarrow \ s = 0$ è singolarità isolata

$f_4(s) = \sin(1/s) \Longrightarrow s = 0$ è sing. isolata

$f_5(s) = \dfrac{1}{\sin(1/s)} \ \Longrightarrow s = 0$ è sing. non isol., $s_k = \dfrac{1}{k\pi}$ sono sing. isol. $(k \neq 0)$

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso vista in precedenza:

Gli zeri della funzione seno (o coseno) in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in $\mathbb{R}$.

Definizione 3 - *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora s_0 si chiama:*

♦ ***singolarità eliminabile*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

♦ ***singolarità polare*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = \infty;$$

♦ ***singolarità essenziale*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

♦ *Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice* ***polo di ordine*** *$N > 0$ (con N numero naturale) se*

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0 \ .$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ $(k \neq 0)$ singolarità polari semplici.

Esempio. Si consideri la funzione $f(s) = s\sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s\sin\frac{1}{s} = s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^5} + ...\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^4} + ... \qquad .$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s\sin\frac{1}{s}$.Definizione 1 - *Un punto s_0 si dice* ***punto singolare per*** *f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in TUTTO I.*

7 Serie di Laurent

Teorema di Laurent *Sia f una funzione analitica in un intorno V di s_0, eccetto, al più s_0, ossia* $\mathbf{f \in C^1(V/\{s_0\})}$ *Ciò posto per $s \in V/\{s_0\}$ si ha*

$$f(s) = \underbrace{...\frac{c_{-k}}{(s-s_0)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{s-s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s-s_0) + .. + c_k(s-s_0)^k + ...}_{(*)} \tag{4}$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{k+1}}ds \tag{5}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

La serie (4) si chiama serie di Laurent in s_0; la serie (+) in (4) si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) **parte analitica.**

PROPRIETA':

♦ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.

♦ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $V/\{s_0\}$.

Teorema (IMPORTANTE!!) *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora:*

(i) *s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);*

(ii) *s_0 è singolarità polare di ordine $N(> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);*

(iii) *s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini.*

8 Serie di Taylor

Dal Teorema di Laurent si ha allora il seguente:

Corollario 1 (Taylor). *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso. Allora per ogni $s \in V$ is ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = c_0 + c_1(s - s_0) + .. + c_k(s - s_0)^k + ... \qquad (6)$$

La formula (6) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno V di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (6)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0*.

Usando poi le formule (5) e la derivabilita' termine a termine della serie (6), si ottiene il seguente.

Corollario 2. *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso e sia (6) la serie di Taylor associata. Allora*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

Dal Corollario 1 si ha poi il risultato (già anticipato):

Corollario 3. *Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono **equivalenti**:*

-1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];

-2) le funzioni u, v ($u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$
$$u_y(x, y) = -v_x(x, y);$$

-3) $f \in C^\infty(V)$;
-4) f è sviluppabile in serie di potenze in V.

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale si ha

$$1) \not\Rightarrow 3)$$
$$3) \not\Rightarrow 4).$$

- Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (6) è unico, si ottengono i seguenti sviluppi "notevoli":

$$e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^n}{n!} + ... \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$
$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$
$$\cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$
$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + ... + s^n + ... \qquad \forall s : |s| < 1.$$

- Esercizio. Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^5} + ...\right) == 1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^4} + ... \quad .$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.

9 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - *Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, nel primo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.*

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1},\ g(s) = \frac{2s^5}{9s+1},\ h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f, il punto $s = \infty$ è un punto di regolarità e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g, il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se grado$N-$grado$D = p$.

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \qquad (s = \infty \text{ punto "regolare"})$$
$$f(s) = s\sin(\frac{1}{s}) \qquad (s = \infty \text{ sing. elim.})$$
$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \qquad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$
$$f(s) = e^s \qquad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$
$$f(s) = \frac{s^3+1}{s+4} \qquad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema *Ogni funzione* ***non*** *razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate e viceversa.*

Corollario *Sia f una funzione razionale. Allora f è costante oppure ha* ***soltanto*** *singolarità di tipo eliminabile e/o polare.*

Esercizio : Classificare le singolarità di

$$f(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi j$, $k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata).

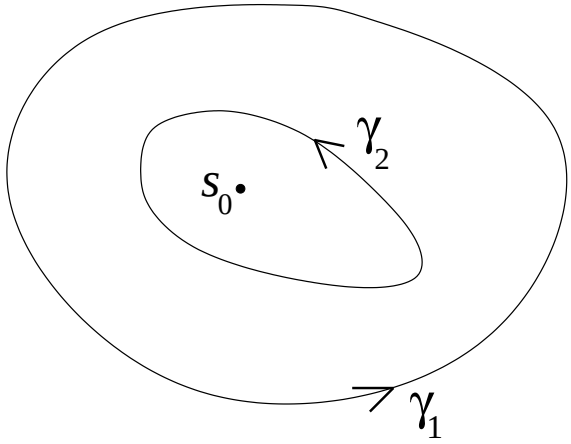

Figura 1

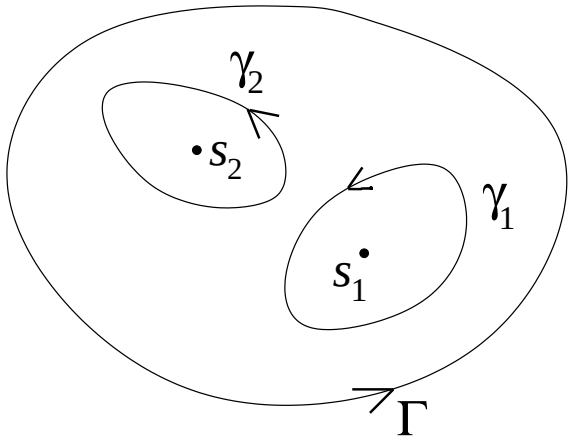

Figura 2